

Appunti di spettroscopia, solo appunti: non libro di testo

C.Rossi

Dipartimento di Fisica, Università di Roma La Sapienza

2 aprile 2012

Indice

1	bibliografia e programma	5
1.1	libri di testo	5
1.2	cap.d introduzione al corso	6
1.3	cap.c richiami di fisica atomica	6
1.4	cap.e processi microscopici	6
1.5	cap.a meccanismi di allargamento dei profili delle righe	7
2	-d- Introduzione al corso	9
3	-c- richiami di fisica atomica	13
3.1	struttura atomica, numeri quantici	13
3.1.1	modello atomico classico	13
3.1.2	rappresentazione chimica	14
3.1.3	rappresentazione quanto-meccanica	15
3.2	livelli di energia, termini	15
3.2.1	atomi a piu elettroni, LS coupling	16
3.2.2	effetto del campo magnetico	17
3.3	effetto di un campo elettrico	18
3.4	terminologia e simbologia - riepilogo	19
3.5	struttura iperfine	20
3.6	TRansizioni , regole di selezione	20
3.6.1	regole di selezione - singolo elettrone	21
3.6.2	regole di selezione - caso LS coupling	22
3.6.3	caso j-j coupling	22

4	—e— -processi microscopici	25
4.1	equilibrio termodinamico	25
4.1.1	eccitazione termica	25
4.1.2	derivazione della legge di Boltzmann	26
4.1.3	ionizzazione termica	28
4.2	equazioni di equilibrio statistico	30
4.2.1	processi radiativi - probabilita' di transizione	30
4.2.2	Calcolo dei valori numerici, trattamento semi-classico	32
5	—a— - profili delle righe	35
5.1	Allargamento Doppler	35
5.2	Profilo rotazionale	37
5.3	Allargamento naturale	39
5.4	Allargamento per pressione (collisionale)	41
5.4.1	teoria dell'impatto	41
5.4.2	teoria delle perturbazioni quasi statiche	43
5.4.3	applicabilita' delle due approssimazioni	44
5.4.4	Significato del parametro n	45
5.4.5	profili di espansione e contrazione	45
5.5	profilo convoluto	47
5.6	coefficiente di assorbimento	48

Capitolo 1

bibliografia e programma

NOTA INIZIALE: ricordo che i nomi a b c d.. sono in ordine di come li ho preparati e non come sono presentati; non vale la fatica rimmetterli a posto. lui pero' li chiama 1, 2, 3 ... secondo l'ordine con cui sono richiamati nel file titolo.tex

singularmente non possono funzionare perche' mancano tutti i comandi di intestazione. Se ne modifico uno e voglio provarlo, nel file titolo.tex ci lascio solamente l' *include* di quello e commento gli altri; ovviamente non li include e quindi nella prova cambiano tutte le numerazioni.

1.1 libri di testo

di volta in volta li cito indicando le pagine o i capitoli a cui mi riferisco;

1. C.R. Kitchin, 'Optical astronomical spectroscopy'; eds: physics publishing bristol and philadelphia. 523,03a, Ki
2. D.Emerson, 'interpreting astronomical spectra', eds: John Wiley and sons. 523,03a, Eme.
3. R.Bowers, T.Deeming 'astrophysics vol.1, stars' eds jones and bartlett, boston. pos 523
4. Jackson 'classical electrodynamics', varie edizioni
5. D.F.Gray,'the observation and analysis of stellar photospheres' third ed.

6. libri di fisica atomica: White 'introduction to atomic spectra' Mc Graw-Hill eds;
Born 'Fisica atomica' Boringhieri; Herzberg 'spettri atomici e struttura atomica'
boringhieri; appunti di Trevese per richiamare che ha fatto...

1.2 cap.d introduzione al corso

discorsivo , preso tutto da Emerson pg 1-7 che e' scritto bene.

1.3 cap.c richiami di fisica atomica

secondo cap del corso cioe' primo dopo l'introduzione. sono solo richiami stringati di *fisica atomica* con le notazioni principali usate in astrofisica. preso sostanzialmente dai seguenti capitoli di kitchin:

sect.2: visione classica e quantistica; definizione delle energie delle orbite elettroniche e numeri quantici

sect.3: livelli energetici, termini, LS coupling, struttura iperfine;

sect.4: transizioni, regole di selezione; cap 4.1 e 4.2; includere richiami da White e da Herzberg per la struttura iperfine.

1.4 cap.e processi microscopici

1) ionizzazione ed eccitazione termica: equazioni di Boltzman e Saha.

preso da Bowers pg 102; Gray da pg 16 in poi; Born per derivazione della equazione di Boltzman.

2) equazioni di equilibrio,

2-1 processi radiativi , probabilita' di transizione, coefficienti . di einstein:

2-2 calcoli dei valori numerici delle probabilita' di transizione

bowers pg 109 e seg.; Jackson citate le pagine nella sezione Consultato anche Kitchin cap 4.3 per introduzione all'argomento delle probabilita' di transizione; introduce i coefficienti di einstein: 4.3.1 interrelazioni fra i coefficienti; chiaro e semplice. buona la sezione 4.4 per l'introduzione del coefficienti di assorbimento.

Dopo non mi piace; comprime gli argomenti senza dare spiegazioni esaurienti.

1.5 cap.a meccanismi di allargamento dei profili delle righe

preso prevalentemente da Emerson, cap 3, tranne dove esplicitamente dichiarato, cioè : profilo di espansione e contrazione da Kitchin parag 13.7.5 pg 220 e seguenti. Alla fine del capitolo riprendo anche Deemings-Bowers cap 6.6, 6.7, 6.8 line broadening anche in idrogeno e elio. Allargamento Zeeman da White, Bowers pg 101,102.

Capitolo 2

—d— Introduzione al corso

aggiornato il 11 agosto 2008, pc

NOTA : ricordo che i nomi dei capitoli a b c d.. si riferiscono all'ordine temporale in cui li ho preparati e non come vengono presentati.

Inoltre le equazioni nel testo vengono richiamate non con il numero del capitolo come dato da LateX, ma con il nome del capitolo: es la 2.3 verra' richiamata nel testo come c.3; (cambiando eventualmente l'ordine dei capitoli, il nome della equazione non cambia)

=====

ref. Emerson pg 1-7

non tratteremo tecniche osservative, ne' analisi dati (corsi di lab).

Alcune definizioni ed equazioni saranno considerate note e utilizzate senza derivazione (profondita' ottica, trasporto radiativo) altre pure, ma la loro derivazione sara' trattata perche' la comprensione e' necessaria per capire tutto quello che viene coinvolto dal loro utilizzo (coeff. di Einstein, equazione di equilibrio di Boltzmann)

- primo argomento sara' un riassunto di fisica atomica di base e terminologia comunemente usata in astrofisica. questi richiami sono fondamentali, non tanto perche' saranno usati qui (poco) ma per non spaventarsi in futuro davanti a terminologie mai sentite prima o di cui si ignora il significato.

- passiamo poi a vedere le ipotesi di base per la formazione dello spettro di righe e le equazioni dell'equilibrio statistico, la formazione e le intensita' delle righe e i meccanismi di allargamento.

Un meccanismo che deve essere chiaro e' quello del **trasporto radiativo**. La definizione stessa dice come l'energia che fluisce attraverso un gas cambia con la profondita' . L'equazio-

ne e' piu' complicata di quanto non sembri perche' oltre ad essere funzione della frequenza ν , lo e' anche della densita' ρ , della metallicita' e della temperatura T. Non dimentichiamo che deve anche rispettare la conservazione della energia. Notare per es. che il gradiente di tutti i vari parametri e dell'opacita' e' forte nelle atmosfere stellari ma quasi nullo nelle nubi molecolari interstellari.

Argomento trattato in dettaglio sara' propriol'**opacita'** e i **coefficienti di assorbimento** (che entra nella definizione di profondita' ottica) e di **emissione**, che definiscono la forma e l'andamento in funzione della frequenza della *funzione sorgente* $S(\nu) = J(\nu) / k(\nu)$.

I coeff. di assorbim e di emiss. sono legati alle probabilita' di transizione fra i livelli energetici atomici e molecolari (righe permesse, proibite) e al numero di ioni che si trovano nei livelli coinvolti nella transizione stessa.

Il numero di ioni e' a sua volta funzione della abbondanza dell'elemento ma anche del grado di ionizzazione ed eccitazione, dissociazione molecolare.

Ora il grado di ionizz, eccit. dissoc. possono essere determinati nel caso di condizione di **stato stazionario** se sono note (ipotizzate) la composizione chimica, densita' temperatura e costanti atomiche. Nelle equazioni dell'equilibrio statistico che esprimono il bilancio arrivi-partenze per ogni livello, bisogna tenere conto di tutti i processi radiativi e collisionali. puo' essere molto complesso in pratica, a meno di non fare ipotesi semplificatrici di validita' di equilibrio termodinamico completo o anche solo locale perche' allora le grandezze coinvolte sono legate fra loro da equazioni fondamentali della meccanica statistica. Allora

a) il campo di radiazione e' dato dalla funzione di Plank (T, ν)

$$I(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (2.1)$$

b) la distribuzione delle velocita' e' di tipo maxwelliano, fondamentale per il calcolo delle collisional rates.

$$N(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right) dv \quad (2.2)$$

c) la popolazione dei livelli atomici segue la distribuzione di Boltzmann (vedremo perche' ha questa forma)

$$N(n)/N = \frac{g_n}{U} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) \quad \text{con} \quad U = \sum_i g_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) \quad (2.3)$$

dove U e' la funzione di partizione e g_i sono i pesi statistici cioe' il numero degli stati degeneri dei livelli (nel caso piu semplice = $2n^2$ e in genere = $2J+1$)

d) la popolazione degli stati di ionizzazione e' regolata dalla equazione di Saha

$$\frac{N_{high} N_e}{N_{low}} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} 2 \frac{U_{high}}{U_{low}} \exp\left(-I/kT\right) \quad (2.4)$$

In tutte queste equazioni compare una **temperatura** che non e' necessariamente la stessa, per es. Maxwell da' una temperatura cinetica (collisioni elastiche). Le collisioni anelastiche portano a una legge di popolamento di tipo Boltzman e si puo' parlare di una temperatura di eccitazione dei livelli (che, dove vale LTE e' pure quella cinetica) e similmente per la ionizzazione (Saha). Questo implica che *LTE vale in regime di alta densita'* come le parti piu' basse delle atmosfere stellari dove il campo di radiazione e' quasi isotropo e il flusso esterno e' solo una piccola perturbazione. Nelle parti piu' esterne e nel mezzo IS, non funziona. La temperatura di radiazione invece e' quella plankiana con eventuali fattori di diluizione nel caso di nubi vicine a sorgenti stellari.

Quindi uno studio spettroscopico di un oggetto dai QSO alle nubi IS vuol dire non solo identificare le righe, ma anche conoscere i meccanismi di formazione e dedurne i possibili parametri : temperatura , campi di velocita', abbondanze chimiche, densita', condizioni di saturazione...

Saturazione e' un termine associato a quelli di righe **otticamente sottili** o **otticamente spesse**.

Riga di emissione in una nube gassosa: l'intensita' della riga cresce linearmente con il numero di atomi fino al punto in cui la nube stessa comincia a riassorbire i fotoni prima che questi possano lasciare la nube. Al limite, aumentando ancora la densita' (o la profondita' ottica), la riga non aumenta piu'; emissione e assorbimento si bilanciano , la sua intensita' e' la plankiana per la frequenza della riga con una temperatura che e' quella di eccitazione del livello superiore. La riga e' otticamente spessa.

Nelle atmosfere stellari il continuo e' otticamente spesso e se l'atmosfera fosse isoterma, anche le righe lo sarebbero e non si vedrebbero. A causa del gradiente negativo di temperatura , il coefficiente di assorbimento aumenta alle frequenze corrispondenti a transizioni piu' di quanto non aumenti ia frequenze adiacenti. Ne segue che $\tau = 1$ e' piu' in alto per le ν delle righe che per il continuo e la funzione sorgente li e' piu' bassa perche' e' funzione di $T \Rightarrow$ vediamo piu' scuro in corrispondenza delle transizioni .

Poi bisogna tenere conto che le **righe non sono monocromatiche** per vari motivi; Doppler (turbolenze micro e macro), collisioni (pressure broadening), campi EM, rotazione. La forma cambia e anche il livello di saturazione.

=====

Capitolo 3

—c— richiami di fisica atomica

aggiornato il 11 agosto 2008, pc

preso sostanzialmente dai seguenti capitoli di kitchin:

cap2: visione classica e quantistica; definizione delle energie delle orbite elettroniche e numeri quantici

cap3: livelli energetici, termini, LS coupling, struttura iperfine;

cap4 :transizioni, regole di selezione; cap 4.1 e 4.2; includere richiami da White e da herzberg per la struttura iperfine.

3.1 struttura atomica, numeri quantici

sin dall'inizio degli studi degli spettri si e' capito che questi possono essere riprodotti solo con modelli della struttura atomica che tengano conto di limitazioni sulle energie permesse per gli elettroni legati ad un nucleo, con l' ulteriore vincolo che non possono coesistere due elettroni che abbiano esattamente la stessa energia. (principio di esclusione di Pauli, empirico ma coerente con le soluzioni delle equazioni della meccanica quantistica.

3.1.1 modello atomico classico

orbite ellittiche : energia totale negativa, conservazione del mometo angolare. In coordinate polari la posizione e' specificata da r e dall'angolo azimutale ϕ . I due momenti coniugati di r e di ϕ (quantita' di moto e momento angolare) sono tali che il loro integrale lungo un'orbita e' un multiplo intero della costante di Plank h . (ipotesi di Sommerfeld)

Lavorando sulle equazioni si arriva a dimostrare che in tal caso il rapporto fra gli assi,

$b/a = k/n$ con $k = \text{numero quantico azimutale}$ ed $n = \text{numero quantico principale}$ interi, positivi e ovviamente $k \leq n$ (fig ki2.4, da pg 20 Kitchin)

Effetti relativistici causano la precessione delle orbite e danno quindi una debole dipendenza della energia da k . In tutto

$$E = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{8\epsilon_0^2 n^2 \hbar^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{3}{4n} \right) \right] \quad (3.1)$$

con $\alpha = e^2/(2\epsilon_0 \hbar c) = 7.2974 \times 10^{-3}$ costante di struttura fine.

L'energia di un livello va quindi sostanzialmente come $1/n^2$, mentre l'ellitticità dipende dal numero quantico azimutale k che in meccanica quantistica è rimpiazzato da $l = k - 1$

Altro numero intero è m_l che tiene conto del fatto che l'orbita avviene nello spazio tridimensionale e che indica la quantizzazione della orientazione dell'orbita in presenza di campi magnetici esterni

$$m_l = 0 \dots \pm k - 1 \text{ cioè } m_l = 0 \dots \pm l$$

In caso di campi esterni i livelli non sono più degeneri e il vettore orbitale precessa intorno alla direzione di riferimento con la frequenza di Larmor ($\nu_L = 1.4 \times 10^{10} H$ Hz con H in tesla).

Altro numero quantico infine è quello corrispondente al fatto che l'elettrone si comporta come una trottola che ruota intorno al proprio asse con un **momento di spin** quantizzato a valori $\pm 1/2\hbar$. $m_s = \pm 1/2$

in tutto :

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots (n-1)$$

$$m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$$

$$m_s = \pm 1/2$$

questi numeri torneranno non come artefatti, ma come condizioni necessarie per la soluzione reale delle equazioni nella trattazione del modello quantistico dell'atomo.

3.1.2 rappresentazione chimica

La tavola periodica era stata sviluppata sulla base delle proprietà chimiche degli elementi che sono stati sistemati in modo da avere sulla **stessa riga** quelli con lo **stesso** n e sulla **stessa colonna** quelli con lo **stesso** l .

Notazione chimica dei numeri principali: (figura ki3.1, 3.2)

1) elettroni che hanno stesso n stanno in una stessa *shell* che si chiamano K,L,M,N,O... ($n = 1, 2, 3 \dots$)

2) gli elettroni che si trovano nei vari stati l sono denominati s, p, d, f... ($l=0, 1, 2, 3..$) vedere il buon esempio del libro per gli elettroni del Ferro, figura ki-pg24.

3.1.3 rappresentazione quanto-meccanica

ref.da Kitchin sect. 2.5.

Gli anni 20 videro svilupparsi due nuove teorie che rappresentavano due diverse formulazioni matematiche di una stessa idea: meccanica ondulatoria (De Broglie-Schroedinger) e meccanica quantistica (Heisenberg)

De Broglie invertì l'idea originale di Plank che le onde possano comportarsi come particelle e associò ad ogni particella con una data p una $\lambda = h/mv$.

In questa visione i numeri quantici derivano direttamente dalle soluzioni delle equazioni che descrivono le proprietà ondulatorie degli elettroni. Equaz. di Schroedinger:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \text{le soluzioni sono tipo } \Psi = \psi \exp \frac{2\pi i vt}{\lambda} \quad (3.2)$$

In termini fisici le orbite di Bohr Sommerfeld sono rimpiazzate dalla probabilità ($\Psi \Psi^* dv$) di trovare un elettrone nel volume dv . Riscrivendo l'equazione di Schroedinger indipendente dal tempo e in coordinate polari, si trova che ψ è una funzione separata di Θ, Φ, R e si verifica che esistono soluzioni permesse solo per valori interi di costanti che possono essere associate ai valori dei numeri quantici classici.

Associati agli angoli θ, ϕ sono due numeri $l(\theta)$ e $m_l(\phi)$ con soluzioni possibili solo per $Cost = l(l+1)$ e $l \geq |m_l|$, cioè $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$.

Per quanto riguarda l'energia, riscrivendo l'equazione in cui sono stati sostituiti i risultati ottenuti, l'equazione ha significato fisico solo per valori negativi dell'energia tali che

$$E = -\frac{Z^2 e^2 \mu}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2} \quad \text{solo per valori interi e positivi di } n \quad (3.3)$$

L'equazione invece ha soluzioni per tutti i valori di E positiva (perdita dell'elettrone = ionizzazione)

3.2 livelli di energia, termini

parzialmente ripreso da Kitchin cap.3

In definitiva le proprietà energetiche degli elettroni legati sono descritte da un set di numeri interi. (NOTA: ricordare che l e s sono numeri associati a due vettori \mathbf{l}, \mathbf{s} di modulo $= \hbar \sqrt{l(l+1)}$ e simile per s)

quello che determina il fattore principale di energie e' il numero quantico principale n . per es., per l'idrogeno, $n=1$ l'energia $e'=-13.60$ eV, mentre per $n=2$ e' -3.4 eV.

Una variazione del numero quantico azimutale l produce una perturbazione la cui entita' dipende dal tipo di elemento e dallo stesso valore di l ; per l'idrogeno da $l=0$ a $l=1$ $\Delta E = 4.5 \times 10^{-5}$ eV. vedi eq (c.1) .

Pero' nei metalli alcalini che hanno pure un solo elettrone di valenza questo vede non solo il nucleo ma pure gli altri elettroni interni ed e' come se percorresse orbite ellittiche penetranti (stesson ma diverso l) e quindi la struttura fine si vede bene nel diagramma di Grotrian: stesso n ma l diversi hanno energie diverse, anche se per l grandi la differenza decresce. (figura ki3.1 e 3.2).

La dipendenza dal valore dello spin m_s e' molto piccola.

momento angolare di spin e momento angolare orbitale per ogni elettrone interagiscono e il risultante e' il **momento angolare totale** a cui e' associato il numero quantico $j = |l \pm m_s|$. es per $l=0$ $j = +1/2$ per $l=1$ $j = 1/2, 3/2 \dots$

per un elettrone i **TERMINI** sono definiti dai vari valori di j per un dato valore di l e hanno differenti energie, quindi in fig. (ki3.1, e 3.2),ogni livello e' sdoppiato con differenza di energia dipendente dal tipo di elem. Es Li: per $n=2$ $l=1$, $j=1/2$ e $3/2$ con 1.84784 e 1.84788 eV ($\Delta E=0.00004$ ev= 6.4×10^{-17} erg) ($\Delta E=h \Delta \nu = h c/\lambda^2 \Delta \lambda$, con $h = 6.63 \times 10^{-27}$ erg sec e per $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ viene circa $\Delta \lambda = 0.09 \text{ Angstrom}$). Per il doppietto D del Sodio 5890, 5896 \AA invece, viene una differenza di 6 \AA (transizione $3^2S \rightarrow 3^2P$ e P vuol dire $l=1$ e quindi $j=1/2$ e $3/2 \rightarrow$ doppietto....).

3.2.1 atomi a piu elettroni, LS coupling

quando piu elettroni nella shell esterna interagiscono, i vettori dei momenti **l** ed **s** si combinano sommandosi in modo vettoriale, ovviamente... dando luogo a due tipi possibili di somme risultanti :

Se gli individuali **l** ed **s** danno i relativi **j** per i singoli elettroni e sono questi ad interagire per dare un **J** totale, si parla di accoppiamento $j-j$ (sezione dedicata alla fine del capitolo).

Se si combinano separatamente i vari **l** per dare il risultante **L = momento angolare azimutale** e i vari **s** per dare **S = momento angolare di spin** per l'atomo, questi due

interagiscono per dare un $\mathbf{J} = \text{momento angolare totale}$ (NOTA i moduli sono come sopra...). Questa viene definita accoppiamento di tipo Russel-Saunders (L-S); funziona bene per elementi leggeri ed e' quello piu' comune nei casi di interesse astrofisico.

-I singoli l si sommano in modo che la regola della somma e' tale che il vettore \mathbf{L} (di modulo $= \hbar \sqrt{L(L+1)}$) ha il numero quantico L che puo' essere solo intero positivo o nullo.

es due elettroni : $L = (l_1 + l_2), (l_1 + l_2 - 1), (l_1 + l_2 - 2) \dots |l_1 - l_2|$

- I singoli spin si sommano allo stesso modo solo che m_s puo' valere solo $\pm 1/2$ e quindi $S = (1/2 + 1/2 + 1/2 \dots), (1/2 + 1/2 + 1/2 \dots - 1), (1/2 + 1/2 + 1/2 \dots - 2) \dots 0$ oppure $1/2$.

Come per il singolo elettrone allora anche l'atomo avra' il **momento angolare totale** \mathbf{J} definito dal numero quantico interno $J = (L + S), (L + S - 1) \dots |L - S|$ Vedere esempio ki-pg36.

Anche qui il set dei valori di energia corrispondenti ai vari valori di J per una data coppia di L ed S e' definito TERMINE. Notare che ai diversi valori di J in un TERMINE corrispondono energie diverse e lo stesso per uguali valori di J ma diversi valori di TERMINE.

Caso importante in astrofisica l'He che ha due elettroni e quindi $S = 1$ oppure 0 il che comporta che i termini sono costituiti da tre livelli di energia ($L+1$), ($L+1-1$) ($L-1$), oppure da uno ($=L$)

Il numero di valori che puo' assumere J in un termine e' definito **MOLTEPLICITA'** ed in genere e' dato da $(2S+1)$.

3.2.2 effetto del campo magnetico

In presenza di un campo magnetico la struttura dei livelli si splitta ulteriormente per effetto delle interazioni del momento magnetico orbitale e di spin con il campo esterno. (in generale la componente del momento magnetico sara' descritta dal numero quantico magnetico m).

L'unita' di momento magnetico e' il 'magnetone di Bohr che per l'elettrone e' $\mu_B = \frac{e}{2mc} \hbar = 0.927 \times 10^{-20} \text{erg/gauss} = 5.79 \times 10^{-9} \text{eV/gauss}$ Caso di un solo elettrone:

Il rapporto fra momento magnetico e momento meccanico orbitale e': $\frac{\mu_l}{p_l} = \frac{e}{2mc}$ con $p_l = \hbar |\mathbf{l}|$ per cui $\mu_l = \frac{e}{2mc} \hbar |\mathbf{l}| \text{ erg/gauss}$

(nota modulo di l : $|\mathbf{l}| = \sqrt{l(l+1)}$)

Per il momento di spin il rapporto invece: $\frac{\mu_s}{p_s} = 2 \frac{e}{2mc}$ con $p_s = \hbar |\mathbf{s}|$ per cui $\mu_s = 2 \frac{e}{2mc} \hbar |\mathbf{s}| \text{ erg/gauss}$

I vettori \mathbf{l} ed \mathbf{s} precessano intorno al risultante \mathbf{j} che ha a sua volta un momento magnetico associato μ_j . Questo in presenza di un campo magnetico, precessa intorno ad

H con la condizione che la proiezione di \mathbf{j} su H possa avere solo valori discreti $m\hbar$ con $m = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots \pm j$.

Quindi i livelli degeneri corrispondenti ad un dato valore di j si splittano con una molteplicità $(2j + 1)$ (Effetto Zeeman).

Mentre la quantizzazione, cioè il numero degli stati dipende dal valore di j , ma non dal campo, la differenza di energia fra loro invece dipende dal campo: **come si ottiene il fattore di Lande'** infatti, come si vede dalla figura wh10.6 il momento magnetico risultante μ_{ls} NON è allineato con j . quindi solo le componenti parallele a j contribuiscono a μ_j momento magnetico totale

$$\mu_j = [|l| \cdot \cos(lj) + 2|s| \cdot \cos(sj)]\hbar \cdot \frac{e}{2mc}$$

la quantità fra parentesi quadre dovrà essere $= j$ per una costante g . Tenendo a mente la figura, dalla composizione dei vettori, sviluppando i calcoli, in termini dei numeri quantici l, s, j , si arriva a:

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad \text{fattore di Lande'} \quad (3.4)$$

Per stesso j , ma diversi l ed s , si ottengono quindi diversi valori di g . La differenza di energia di un livello in presenza di campo rispetto alla energia originale si calcola ricordando che l'energia di precessione è data dal prodotto della velocità angolare di precessione ($\omega_L = gH \frac{e}{2mc}$) per la componente del momento meccanico totale $j\hbar$ ($m_j\hbar$) sull'asse di H.

$$E_H = gH \frac{e}{2mc} m_j \hbar$$

Per atomi con più elettroni In LS coupling succede lo stesso, ma al vettore \mathbf{J} che secondo il numero di elettroni (pari o dispari) può essere intero o semintero. La sua proiezione sulla direzione del campo può prendere valori da $-J$ a $+J$ in unità \hbar con $M = \text{numero quantico magnetico}$ che descrive la proiezione da $-J$ a $+J$.

3.3 effetto di un campo elettrico

Nel caso di presenza di un campo elettrostatico l'energia di un elettrone con dati n ed l dipende solo dalla distribuzione di carica rispetto al campo e non come nel caso di campo magnetico, dal verso di rotazione dell'elettrone nella sua orbita.

Conseguenza: gli effetti sulla energia dei livelli sono diversi da quelli dovuti alla presenza di un campo magnetico. In generale l'effetto di un campo F sulla energia dei livelli di un atomo può essere rappresentata con una espressione del tipo: $\Delta T = A F + B F^2 + C F^3, \dots$

effetto Stark lineare = Campo esterno debole, Singolo elettrone: in questo caso lo spin dell'elettrone NON interagisce con il campo e quindi l'interazione di \mathbf{j} con \mathbf{F} e' dovuta quasi unicamente al contributo del momento orbitale \mathbf{l} . La proiezione di \mathbf{j} su \mathbf{F} assumerà valori da $-j$ a $+j$ (v. figura wh20.2) ma e' anche importante sapere che per gli idrogenoidi stati con stesso numero quantico principale ma diverso momento angolare orbitale hanno i livelli con j uguale che in assenza di campo sono degeneri. (vedi figura wh20.3) In presenza di un campo elettrico es. i due livelli $^2D_{3/2}$ e $^2P_{3/2}$ che erano degeneri, si splittano, e la degenerazione viene rimossa. ma, per quanto detto sopra, i livelli finali per esempio $\pm 3/2$ del 2D hanno fra loro la stessa energia; e anche (fra loro) i livelli finali per esempio $\pm 3/2$ del 2P . Il risultato e' uno split dei livelli simmetrico rispetto alla posizione imperturbata. Siccome l perde di significato, i numeri quantici importanti sono n, j, m_j .

Per campi molto intensi (per H) e per atomi non idrogenoidi, prevalgono gli effetti della perturbazione del secondo ordine (**effetto Stark quadratico**) che portano non solo ad un allargamento dei livelli energetici di un termine, ma anche a uno spostamento in blocco, proporzionale al quadrato della perturbazione. La trattazione non interessa ai fini del nostro discorso.

3.4 terminologia e simbologia - riepilogo

prevalentemente da sezione 3.4 e seguenti da kitchin

la simbologia studiata ed evoluta negli anni per identificare univocamente uno stato (livello, termine) di un atomo e quindi le transizioni, deve necessariamente contenere riferimenti sia ai singoli elettroni sia all'atomo come un tutto. le energie sono descritte da STATI, TERMINI, LIVELLI. (anche se poi in effetti a volte la terminologia usata in pratica mescola le definizioni)

- STATO e' l'energia di un valore di M (num quantico magnetico) per un particolare valore di J (num. quantico interno).

- LIVELLO e' costituito dall'insieme degli stati per un particolare valore di J derivante da una precisa coppia di L ed S

- TERMINE e' l'insieme dei possibili livelli per quella coppia di L ed S , cioe' l'insieme dei possibili valori di J .

Storicamente in particolare nei metalli alcalini si era notato che le righe spettrali si presentavano in serie con aspetti differenti che potevano essere differenziate (sharp diffuse principal fundamental e poi le altre..). Poi si capi' che corrispondevano a transizioni fra

specifici livelli corrispondenti a l diversi e allora i livelli $l=0, 1, 2, 3$ furono denominati s, p, d, f e così via.

Per l'atomo (ione) considerato globalmente si usa la stessa notazione riferendosi agli elettroni della shell più esterna che è quella che contribuisce alle transizioni.

Poi c'è un ultimo fattore (la PARITA) di cui tenere conto, necessario per capire fra quali livelli sono possibili le transizioni e quali stati sono veramente permessi sulla base del principio di esclusione di Pauli: (Ricordare che le combinazioni sono soggette a restrizioni prescritte dal principio di Pauli e quindi elettroni equivalenti (con stesso nl) devono avere diverso m_s oppure m_l vedi esempio pg 39: se ho due elettroni con stesso n e stesso $l_1 = l_2 = 1$, la loro combinazione con $L=2$ può essere solo con il finale che i due numeri di spin m_s siano opposti perché se entrambi avessero $m_s = +1/2$ oppure $-1/2$, i due elettroni avrebbero tutti i numeri uguali.

la **PARITA'** è la somma dei singoli l degli elettroni. se è dispari, nella notazione finale si aggiunge un suscritto o , se è pari nulla.

ESEMPIO di notazione globale il Boro (dispari)

$1s^2, 2s^2, 2p, {}^2P_{1/2}^o$ i primi tre sono per i singoli elettroni (due elettroni nel livello con $n=1$ e $l=0(s)$, 2 elettroni in $n=2$ e $l=0(s)$, un solo elettrone per $n=2$ e $l=1(p)$ e infine stato fondamentale globale: superscritto $2= (2S+1)$, cioè in questo caso $S=1/2$; la P, significa $L=1$; Parità dispari perché c'è il superscritto o (infatti la somma dei vari l è dispari perché è $2*0+2*0+1*1$); infine $J=1/2$

figura ki3.9 (da Kitchin pg 42)

3.5 struttura iperfine

NON so se inutile, comunque riferimenti da: 1) Kitchin pg 44; 2) Born pg 257; 3) White pg 352; 4) Herzberg pg 188; 5) Trevese appunti pg 76 circa sulla riga 21 cm. PER il corso serve solo capire che esiste per cui basta Kitchin.

3.6 Transizioni, regole di selezione

riferim: cap 4 Kitchin, White un elettrone di valenza pg 117 e seg, più quelle per 2 elettroni da pg 203 in poi per LS coupling.

L'energia può essere guadagnata da un atomo per collisioni, decadimenti radioattivi,

reazioni cicliche, campi e.m. , campo di radiazione esterno per assorbimento di fotoni con transizioni verso livelli superiori.

L'energia puo' essere perduta per collisione , e radiazione e un fotone puo' essere emesso indipendentemente dalla presenza di un campo di radiazione.

Le transizioni fra livelli o stati (la degenerazione e' rimossa dalla presenza di ampi estrni) avviene secondo regole (valgono anche se non e' rimossa ma non si vede...) le regole sono derivabili sostanzialmente dalla conservazione del momento angolare.

3.6.1 regole di selezione - singolo elettrone

con un solo elettrone di valenza le transizioni danno righe a coppie (vero solo in assenza di campi esterni e SE uno dei due livelli coinvolti e' s !!!!. altrimenti sono due forti e una satellite debole. Le regole piu o meno valide per transizioni permesse sono:

$$\Delta n = \text{qualsunque}, \quad \Delta l = \pm 1, \quad \Delta j = 0, \pm 1$$

Es di vero doppietto e' quello di struttura fine del Sodio 5890, 5896 Å . la transizione e' $3^2S_{1/2} - 3^2P_{1/2,3/2}$ Il superscritto 2 viene perche' S=1/2 essendo un solo elettrone di valenza. Per il livello P (L=1), $J = L \pm S = 1 + 1/2$ oppure $1 - 1/2$. (vedi es. figura wh8.4, da White pg 118)

Altro esempio di vero doppietto e' quello di struttura fine del Ca II 3933, 3968Å . la transizione e' $4^2S_{1/2} - 4^2P_{1/2,3/2}^o$ Anche qui Il superscritto 2 viene perche' S=1/2 essendo anche qui un solo elettrone di valenza, come per il Sodio. Per il livello P (L=1), $J = L \pm S = 1 + 1/2$ oppure $1 - 1/2$. La transizione 1/2-1/2 da' la riga 3968, La transizione 1/2-3/2 da' la 3933Å.

Quando nessun valore di L coinvolto e' S (cioe' L =0), compare una riga satellite. Le regole di intensita' prevedono che le piu forti siano le transizioni con L e J che cambiano nello stesso modo

Un esempio e' la transizione del Ca II, $4^2P_{1/2,3/2}^o - 4^2D_{3/2,5/2}$ che da' luogo a un tripletto: $\lambda = 3179$ per J 3/2-5/2 ; $\lambda = 3158$ per J 1/2-3/2 ; $\lambda = 3181$ per J 3/2-3/2 ; Le due righe piu forti sono le prime due per le quali L aumenta di 1 da P a D e J aumenta anche di 1 (3/2 a 5/2 e 1/2 a 3/2 rispettivamente) Nella terza transizione $\Delta J = 0$ per cui e' la piu debole.

3.6.2 regole di selezione - caso LS coupling

con piu elettroni coinvolti le regole cambiano un po' e aumentano; le transizioni permesse sono:

$$\Delta n = \text{qualsunque}, \quad \Delta l = 0, \pm 1, \text{ (a parte 0-0 che e' proibita)} \quad \Delta j = 0, \pm 1 \text{ (a parte 0-0 che e' proibita),} \\ \Delta s = 0, \quad \text{cambiamento di Parita'..}$$

In astrofisica si sente spesso il termine MULTIPLETTO, con cui si designa l'insieme delle transizioni permesse da un termine a un altro.

Es ${}^3P_{2,1,0} - {}^3D_{3,2,1}$ sono transizioni da un set di stati J corrispondenti alla coppia (3P : S=1, L=1 e quindi J=2, 1, 0) a un altro set di stati J corrispondenti alla coppia (3D : S=1, L=2 e quindi J=3, 2, 1)

Righe permesse : ${}^3P_2 - {}^3D_2$ ($\Delta J = 0$), ${}^3P_2 - {}^3D_3$ ($\Delta J = +1$), ${}^3P_2 - {}^3D_1$ ($\Delta J = -1$), ${}^3P_1 - {}^3D_1$ ($\Delta J = 0$), ${}^3P_1 - {}^3D_2$ ($\Delta J = +1$), ${}^3P_0 - {}^3D_1$ ($\Delta J = +1$),

3.6.3 caso j-j coupling

ref: tutto estratto da White a partire da pg 189 in poi. defin. di j-j buona e buone le figure anche per LS e JJ pg 191 e seguenti

Nel caso di due elettroni di valenza ci sono 4 momenti angolari possibili (l_1, s_1, l_2, s_2), che possono dare luogo a 6 combinazioni [$n! / [(n-k)!k!]$ con $n=4, k=2. =24/4=6$] :

$$l_1 l_2, s_1 s_2, l_1 s_1, l_2 s_2, l_1 s_2, l_2 s_1$$

Le interazioni 5 e 6 sono molto deboli sempre; la 1 e la 2 danno LS coupling; la 3 e la 4 danno luogo al jj coupling ; infatti i due l ed s si combinano indipendentemente per dare i due j che poi si combinano fra loro per dare il J finale. Descrizione vettoriale visualizzata bene per i due casi in figura wh12.5 (white pg191). Si puo' pensare che i due l ed s precessino rapidamente intorno al rispettivo risultante j. A loro volta i due j precessano intorno al loro risultante J.

Ora lo spin s_1 e' quantizzato rispetto a l_1 per cui j_1 ha solo valori semi interi . lo stesso per l'altro elettrone. I due j sono quantizzati rispetto al loro vettore somma J in modo che ovviamente il numero che lo descrive puo' prendere solo valori interi da $|j_1 + j_2|$ a $|j_1 - j_2|$

Esempio: una configurazione fra un elettrone p ($s_1 = \frac{1}{2}$ $l_1 = 1 \rightarrow j_1 = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$;) e un elettrone d ($s_2 = \frac{1}{2}$ $l_2 = 2 \rightarrow j_2 = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$;) .

Le possibili combinazioni fra i vari valori del numero quantico j sono:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rightarrow J = 2, 1; \quad \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \rightarrow J = 3, 2; \quad \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rightarrow J = 0, 1, 2, 3; \quad \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \rightarrow J = 1, 2, 3, 4.$$

Le regole di selezione - non strettissime- sono $\Delta j_1 = 0, \pm 1$ $\Delta J = 0, \pm 1$ tranne $0 \rightarrow 0$ che e' proibita.

Nella maggior parte dei casi il **jj coupling** si manifesta come una violazione delle regole di selezione del caso LS . tipicamente viene violata la $\Delta S = 0$, con conseguenti transizioni con cambio di molteplicita' fra il livello di partenza e di arrivo. Le righe che si formano sono dette di intercombinazione . Esempio: Si I: $3p^2 \ ^3P- > 3p4s \ ^1P^o$, cambia da S=1 a S=0.

Le righe di intercombinazione vengono indicate con una parentesi quadra sola, a destra es: Mg I]4571Å. Quelle veramente proibite, con bassa probabilita' (10^{-5} a 10^{-12}) rispetto alle permesse, sono tali che $\Delta L, o \Delta M = 2$ cioe' $\Delta J = 2$ e sono rappresentate come es. [NII] 6548 Å.

Una riga proibita importante e' quella di struttura iperfine da 21 cm dell'H che produce una separazione del livello $1^2S_{1/2}$ di $\Delta E \simeq 6E^{-6}$ eV (21cm = 1420 MHz). La probabilita' di transizione e' tale che la vita media e' circa $1.1 \cdot 10^7$ anni, pero', data l'abbondanza dell'H si vede ed e' fondamentale per investigare la struttura del disco galattico dove l'H neutro e' abbondante.

Capitolo 4

—e— -processi microscopici

aggiornato il 11 agosto 2008, pc

ref. 1) ionizzazione ed eccitazione termica principalmente Bowers da pg 102 in poi; Gray da pg 16 in poi; Born per derivazione equaz di Boltzman; 2) equazioni di euilibrio, coeff. di einstein: Bowers pg 109 e seg. + altre cose Jackson classic electrodynamics

4.1 equilibrio termodinamico

le caratteristiche osservative dalle galassie, alle atmosfere stellari e alle nebulae IS dipendono un poco dalla composizione chimica ma prevalentemente dal grado di eccitazione e ionizzazione dei livelli atomici e dal coeff. di emissione/assorbimento del continuo. Le popolazioni relative dei livelli dipendono dai meccanismi di popolamento e svuotamento dei livelli che In una atmosfera stellare sono:

1) assorbimento radiativo che eccita un elettrone verso livelli piu' alti; 2) meccanismi collisionali in cui eccitazione e diseccitazione avvengono tramite energia meccanica -termica; 3) emissione radiativa (diseccitazione spontanea); 4) emissione stimolata da un fotone (assorbimento negativo).

Quando le collisioni dominano sugli altri processi, le popolazioni possono essere calcolate dalle equazioni dell'equilibrio termodinamico

4.1.1 eccitazione termica

cominciamo da calcolo del numero di atomi i cui elettroni sono eccitati in un livello n , che e' dato dalla formula di Boltzmann (derivazione nel paragrafo successivo)

$$N_n = A g_n \exp - (\chi_n/kT) \text{ con } k = 8.61 \times E - 5eVK^{-1}$$

con A= costante, χ energia dello stato n e $g_n = 2J+1$ **peso statistico** del livello n, che in pratica e' la molteplicita' del livello, composto di g_n stati degeneri in assenza di campi magnetici esterni. (ogni stato e' associato a un numero quantico magnetico $M = -J, -(J-1)... +J$) La popolazione del livello si ottiene sommando le popolazioni degli stati e quindi e' proporzionale al numero degli stati . Due livelli con la stessa energia, hanno popolazioni relative proporzionali al rapporto fra i relativi pesi statistici.

Quindi il rapporto fra le popolazioni di due livelli e'

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} \exp - (\chi_n - \chi_m)/kT \quad (4.1)$$

e il num. di atomi per unita' di volume espresso come frazione rispetto al totale e'

$$\frac{N_n}{N} = \frac{g_n}{U(T)} \exp - \left(\frac{\chi_n}{kT}\right) \quad \text{con} \quad U(T) = \sum_i g_i \exp - \left(\frac{\chi_i}{kT}\right) \quad (4.2)$$

U e' definita come la **funzione di partizione** che in pratica non diverge perche' l'esponente va a zero molto rapidamente gia' dai primi termini; inoltre ilivelli piu alti si 'confondono' col continuo, dove gli elettroni sono poco legati e vengono facilmente rimossi per collisione. UNA NOTAZIONE spesso utilizzata in astrofisica per l'equazione e' :

$$N_n/N = \frac{g_n}{U(T)} 10^{-\left(\frac{Log e}{kT}\right) \chi_n} = \frac{g_n}{U(T)} 10^{-\theta \chi_n} \quad \text{con } \theta = 5040/T \text{ e con } 5040 = Log e/k$$

figura gr1.9 (pg 16 Gray)

4.1.2 derivazione della legge di Boltzmann

ref: da Born Fisica atomica ed Boringhieri, pg 23 e seg.

se un gas e' in uno stato stazionario, questo e' il piu probabile. In un ambiente chiuso e diviso in celle, contenente ciascuna n_i particelle, il num. totale di particelle e' : $n=n_1+n_2+n_3$ Indichiamo con $g_k = \omega_k/\omega$ il rapporto fra la dimensione di una cella e il volume totale; ne segue che la probailita' totale e' $\sum g_i = 1$. Che distribuzione di probabilita' si ottiene?

Permutando le molecole, la distribuzione delle probabilita' deve essere la stessa ; il numero di combinazioni e' in tutto : $n! / (n_1! n_2! n_3!...)$. Questo va moltiplicato per il prodotto $g_1^{n_1} g_2^{n_2}....$ con g_1 probabilita' che una singola particella cada nella cella numero 1 e quindi $g_1^{n_1}$ e' che n_1 particelle cadano nella prima cella.

In tutto la distribuzione delle probabilita' diventa: $W = [g_1^{n_1} g_2^{n_2} ...] \frac{n!}{n_1! n_2! ...}$

Trasformiamo la distribuzione, calcolando i logaritmi e ricordando il teorema di Stirling:

$\ln K! = K(\ln K - 1)$ valida per K grande (advanced calculus pg 92 Shaum)

la distribuzione diventa:

$$\ln W = (n \cdot \ln n - n) + n_1 \cdot \ln g_1 - [n_1 \cdot \ln n_1 - n_1] + n_2 \dots = n \cdot \ln n + n_1 \cdot \ln\left(\frac{g_1}{n_1}\right) + n_1 + n_2 \dots$$

$$\ln W = n \cdot \ln n + n_1 \ln \frac{g_1}{n_1} + n_2 \ln \frac{g_2}{n_2} \dots \quad (4.3)$$

per trovare la distribuzione più probabile per il numero di particelle, bisogna calcolare il massimo di $\ln W$ per variazioni di n_1, n_2, \dots . Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dalla equaz. 4.3

$$\frac{\partial \ln W}{\partial n_1} = \ln(g_1/n_1) + n_1(-1/n_1) = \ln(g_1/n_1) - 1 = \lambda \quad (4.4)$$

e similmente per gli altri termini, con la costante λ uguale per tutti e determinata dalla condizione della sommatoria sugli $n_i = n$ totale, il che vuol dire $g_1/n_1 = g_2/n_2 = \dots = \exp(\lambda + 1) = \text{costante}$.

Ma il numero atteso di particelle nella cella n_1 e' = probabilita' g_1 moltiplicata per il numero totale di prticelle n : $n_1 = n g_1 = n(\omega_1/\omega)$ e lo stesso per tutte le altre. Il che vuol dire che il numero di particelle in una cella e' proporzionale alle sue dimensioni (*si otterrebbe una prevedibile distribuzione uniforme delle molecole nel recipiente*)

Ma la distribuzione delle velocita' non e' uniforme e quindi non lo e' la distribuzione delle energie ϵ_i . Le condizioni al contorno sono allora due : sul *numero* e sulla *energia* delle particelle del gas.

$\sum n_i = n$ e $\sum n_i \epsilon_i = E$ quindi i moltiplicatori di Lagrange sono due e le derivate sono:

$$\frac{\partial \ln W}{\partial n_i} = \ln(g_i/n_i) - 1 = \lambda + \beta \epsilon_i \quad \text{da cui si ha : } n_i = g_i \exp(-1 - \lambda - \beta \epsilon_i)$$

Quindi a parita' di dimensioni di celle, risulta meno densamente popolata quella con energia più alta e l'andamento n_i vs ϵ_i segue una distribuzione esponenziale.

Applicando i concetti di sopra a un gas termalizzato, l'energia per molecola e' $\epsilon_i = 1/2 m v^2 = 3/2 kT$. Le celle sono da pensare nello spazio dei volumi (velocita') e conviene passare a coord. polari. Per trovare i due param λ e β bisogna integrare su n_i e su $n_i \epsilon_i$ ottenendo che $\beta = 1/kT$ e $\lambda = m/2kT$. Alla fine il risultato per particella di energia χ_i

da' una legge in cui n_i e' proporzionale alla probabilita' individuale g_i moltiplicata per un fattore esponenziale dipendente dalla energia della particella e dalla temperatura del gas

$$n_i = A g_i \exp - (\chi_i/kT)$$

4.1.3 ionizzazione termica

ref: essenzialmente Bowers, pg 102 , 6.2 per inizio sezione sulla ionizzazione

Quando kT diventa confrontabile con l'energia di legame, si ha ionizzazione. Per l' H e' 13.6 eV che corrisponde a 10^5 gradi circa; ma in effetti la ionizzazione inizia molto prima e vedremo che e' funzione anche della pressione del gas.

Dalla formula di Boltzmann si vede che per temperature sempre piu' alte vengono popolati livelli sempre piu' alti. La ionizzazione comincia a essere importante.(figura bow6.3) e applichiamo la formula di Boltzmann al caso di atomi con elettroni che hanno livelli energetici nel continuo:

$$\frac{N_i(v)}{N_n} = (g_i) \frac{g(v)}{g_n} \exp - [(\chi_n + 1/2 mv^2)/kT]$$

con χ_n energia di ionizzazione dell'elettrone che stava nello stato n. L'energia dell'elettrone libero, dopo e': $1/2mv^2$. $N_i(v)$ e' la densita' degli ioni che hanno perso l'elettrone che ora ha velocita' v . $g(v)$ e' il peso statistico dell'elettrone libero e g_i e' il peso statistico (probabilita') dello ione nello stato finale. (notare che la formula rappresenta una distribuzione di probabilita' e che la probabilita' del sistema e' una prob. composta (prodotto) e che in questo sistema entrano in gioco lo ione nello stato iniziale, un elettrone diventato libero e lo ione nello stato finale). Altro modo di scrivere la formula:

$$\frac{N_i(v)}{N_n} = (g_i) \frac{g(v)}{g_n} \exp - (\chi_n/kT) \exp - (p^2/2mkT)$$

come calcolo $g(v)$?

In un elemento nello spazio delle fasi $dN=(dx dy dz) (dp_x dp_y dp_z)$ il numero di stati quantici (peso statistico) e': $g(v) = \frac{dN}{h^3}$. Parlando di elettroni con DUE posizioni di spin, per UNITA' di VOLUME, il peso statistico va moltiplicato per 2 e diviso per $(dx dy dz)$; poi, tenendo conto che ci sono altri elettroni da altri atomi, per una DENSITA' ELETTRONICA n_e , gli stati sono invece ridotti di $1/n_e$. In tutto:

$$g(v) = \frac{2 dp_x dp_y dp_z}{n_e h^3} \quad \text{l'equazione diventa:}$$

$$n_e \frac{N_i(v)}{N_n} = g_i \frac{2 dp_x dp_y dp_z}{h^3 g_n} [\exp - (\chi_n/kT)] [\exp - (p^2/2mkT)]$$

passando a *coordinate polari* e *integrando* su tutti i possibili valori di p si ottiene l'equazione per la popolazione degli stati di ionizzazione derivata da Saha;

$$n_e \frac{N_i}{N_n} = 2 g_i \frac{(2 \pi m_e kT)^{3/2}}{h^3 g_n} e^{-\chi_n/kT} \quad (4.5)$$

Anziche' allo stato di ionizzazione dello stato originale n , conviene riscriverla riferendosi alla densita' dell'atomo neutro in tutti gli stati possibili, e rimpiazzare g_n con $U_{0(T)}$. lo stesso per tutti gli stati dello ione nel grado di ionizzazione rimasto i ; Si usa spesso anche mettere direttamente in evidenza la pressione che normalmente e' la pressione elettronica $P_e = n_e kT$.

$$\frac{N_i}{N_0} = 2 \frac{U_i}{U_0} \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} \frac{(kT)^{5/2}}{P_e} e^{-\chi_0/kT} \quad (4.6)$$

(FIGURE gr1.10 , e bow6.3)

NOTARE! attenzione! su bowers la 6.18 e' sbagliata: ha un5/3 e non 5/2 !!! ci sono altri modi in cui la formula e' espressa, per es esprimendo le grandezze in cgs (1.21, 1.22 gray); una notazione che spesso si trova per sopperire alla mancanza di conoscenza di valori assoluti , e' l'uso del rapporto rispetto a un livello particolare....

implicazioni della formula di Saha sono sul numero di elettroni forniti dai vari ioni nel contributo alla **opacita' del continuo e alla intensita' delle righe** (figura 11.3 kitchen). applicazioni e verifica diretta:

1) Atomi con basso potenziale di ionizzazione si ionizzano prima, naturalmente.... apparentemente, confrontando per $T=6000K$ $N(Na^+)(5.16eV)$ e $N(H^+)(13.6eV)$, il rapporto e' circa 10^{+7} . Il rapporto solare della abbondanza Na/H e' circa 10^{-6} , ne segue che gli elettroni sono principalmente forniti dal Na e sono loro che determinano il valore di n_e e quindi l'abbondanza dello ione H^- che e' il maggiore contribuente alla opacita' del continuo. Una diminuzione di n_e e quindi di P_e aumenta la ionizzazione di H^- verso H neutro e quindi diminuisce l'opacita'. Effetto in stelle di Popolazione II dove le abbonanze metalliche sono piu' basse e quindi e' piu' piccolo n_e e le righe di H sono piu' forti rispetto a Pop I solo perche il continuo e' meno depresso.. conseguenza: misclassificazione.

2) a parita' di T , effetti sulla equazione di saha sono dovuti alla gravita' superficiale e quindi alla densita' superficiale. Dove la densita' e' piu' bassa, la ionizzazione e' piu' alta. Quindi stelle di stessa T_{eff} e differente gravita', hanno spettri di diverso grado di ionizza-

zione. Per avere lo stesso grado di ionizzazione, una gigante deve avere una temperatura piu' bassa di una di sequenza. esempio buono e' la figura bow6.2.

4.2 equazioni di equilibrio statistico

4.2.1 processi radiativi - probabilita' di transizione

references: introduzione da Emerson, pg 41 e seg; e poi segue da Bowers,pg 109 e seg; e riprendo anche Kitchin pg 53 e seg

La velocita' dei processi che causano le transizioni fra due livelli atomici e' definita come il numero delle transizioni per unita' di tempo , per particella attraverso il particolare processo coinvolto Le transizioni possono avvenire sia per processi radiativi, che collisionali e il numero di transizioni da un livello i a un livello j sara' genericamente definito come $N_i(R_{ij} + C_{ij})$.

L'equazione di Boltzmann e Saha forniscono in condizioni particolari, le popolazioni relative dei livelli energetici e ioni ma non aiutano a calcolare le intensita' delle righe spettrali . Queste sono definite attraverso concetti quali *probabilita' di transizione* a livello microscopico e di *coefficienti di emissione e assorbimento* a livello macroscopico.

Il concetto di probabilita' di transizione e' legato a quello di *vita media* dei livelli, di piu facile approccio concettuale. Le righe permesse e proibite sono definite tali in base a una valutazione quantitativa del tempo di una transizione spontanea dal livello superiore a quello inferiore. la *vita media* e' il tempo che , in media, l'atomo rimarrebbe in uno stato prima di essere soggetto a un decadimento spontaneo ad un livello inferiore.

Da un punto di vista di meccanica quantistica, la vita media e' legata alla sovrapposizione degli integrali delle funzioni d'onda corrispondenti ai due stati coinvolti nelle transizioni. le vite medie vanno da 10^{-8} secondi per transizioni permesse, a 10^{-5} per intercombinazione, e da 10^{-3} a 10^5 o piu' per quelle proibite. In casi puramente radiativi come i processi radioattivi viene naturale associare le vite medie all'inverso delle **probabilita' di transizione fra due livelli** per unita' di tempo $A_{nm} \propto 1/\tau$, avendo definito A_{nm} la probabilita' di transizione.

Nell'ipotesi iniziale di struttura fine =0, cioe' di molteplicita' =1, in caso di decadimento spontaneo ($n > m$) si ha :

$$N_{nm}(t) = N_n(0) \exp - (A_{nm}t) \quad (4.7)$$

$$\text{allora } \langle \frac{N(t)}{N(0)} \rangle = \int_0^\infty e^{-A_{nm}t} dt = -\frac{1}{A} \int e^{-x} dx = -\frac{1}{A} [e^{-\infty} - e^0] = +\frac{1}{A_{nm}}$$

Volendo considerare tutti i livelli piu bassi di n: $A_n = \sum_m A_{nm}$

In definitiva il numero di transizioni spontanee da $n \rightarrow m$ per unita' di tempo e' : $N_n A_{nm}$ (EMISSIONE SPONTANEA).

Il processo inverso e' L'ASSORBIMENTO RADIATIVO, di un fotone ν . Qui serve un campo di radiazione di densita- di energia (6.30 Deeming)

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)} \quad (4.8)$$

Allora la probabilita' di assorbimento radiativo $m \rightarrow n$ per unita' di tempo e': (eq 6.26 Deeming)

$$u_\nu B_{mn} = B_{mn} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)} \quad (4.9)$$

I due processi da soli non possono portare alle popolazioni di equilibrio predette dalla termodinamica, per cui si deve tenere conto di un altro processo, l'EMISSIONE STIMOLATA $N_n u_\nu B_{nm}$, che ha pure bisogno della presenza di un campo di radiazione, ovviamente.

In tutto lequilibrio statistico puo' essere espresso come: (6.28 Deeming)

$$N_n A_{nm} + N_n u_\nu B_{nm} = N_m u_\nu B_{mn} \quad (4.10)$$

Riarrangiando si ha: (eq.6.29 Deeming)

$$u_\nu = \frac{N_n A_{nm}}{N_m B_{mn} - N_n B_{nm}} = \frac{A_{nm}/B_{nm}}{\frac{N_m B_{mn}}{N_n B_{nm}} - 1} \quad (4.11)$$

confrontando con la equaz 4.9 e con la densita' di energia di sopra, equaz 4.8, ne segue che deve essere: (6.32 Deeming)

$$B_{mn}/B_{nm} = 1 \quad N_m/N_n = \exp(h\nu/kT) \quad A_{nm} = B_{nm} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad (4.12)$$

Dalla dipendenza con il cubo della frequenza del rapporto A/B ne segue che per alte frequenze, l'emissione stimolata e' trascurabile (in pratica dall'infrarosso in su).

Il tutto sempre nella ipotesi di degenerazione dei livelli; nel caso piu generale, dalla equaz 4.11 e dalla formula della densita' di energia (equaz.4.8) deve essere:

$$\frac{N_m B_{mn}}{N_n B_{nm}} = \exp(h\nu/kT) \text{ ma da Boltzman}$$

$$\frac{N_m g_n}{N_n g_m} = \exp(h\nu/kT) \text{ da cui}$$

$$\frac{B_{mn}}{B_{nm}} = \frac{g_n}{g_m} \text{ ed essendo valida la equaz.4.12, segue che (6.38 Deeming)}$$

$$A_{nm} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{g_m}{g_n} B_{mn} \quad (4.13)$$

4.2.2 Calcolo dei valori numerici, trattamento semi-classico

ref traccia da Deeming pg 111 e seg. + per calcoli dettagliati: Jackson, terza edizione cap 16 + Chpolski physique atomique vol 1; attenzione deeming formule sbagliate a pg 112 !

Esempi numerici di probabilita' di transizione sono mostrati in tabella 4.3 pg 55 Kitchin. In pratica e' sufficiente calcolare il valore numerico di A_{nm} per una transizione e gli altri coefficienti possono essere calcolati di conseguenza. Anche se il problema puo' essere trattato in modo quanto-meccanico, una trattazione classica e' piu' semplice e arriva quasi allo stesso risultato. Cominciamo col ricordare che la probabilita' di un evento qualunque dipende dalla molteplicita' delle modalita' di successo(dal peso statistico); lo stesso vale per un fotone. Il peso statistico di un fotone di frequenza compresa fra ν e $\nu + d\nu$ si puo' calcolare ricordando che nello spazio delle fasi il peso statistico per una particella e' $dN/h^3 = dx dy dz dp_x dp_y dp_z/h^3$. Pasando a coordinate polari, il peso statistico per unita' di volume di una particella con momento linear $p, p + dp$ in una direzione specificata da un angolo solido $d\Omega$ e' $p^2 dp d\Omega/h^3$. Il momento lineare di un fotone e' $p = h\nu/c$ e allora il peso statistico in funzione della frequenza e' proporzionale al quadrato della frequenza: $\nu^2 d\nu d\Omega/(h c^2)$ cioe' transizioni a frequenza piu' grande hanno maggiore probabilita' di successo.

Piu' in dettaglio, una trattazione classica schematizza un atomo come un dipolo elettrico con l'elettrone che oscilla intorno al nucleo. Jackson cap 16, da inizio.

NOTA: una carica soggetta ad accelerazione (costante) per un intervallo di tempo T, irradia energia con un tasso: (formula di Larmor (Jackson 14.22) per cariche accelerate non relativistiche)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2 \rightarrow E_{rad} = \int_0^T \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2 T \quad (4.14)$$

Nel caso del dipolo, se non ci fosse perdita di energia (damping) il moto sarebbe di tipo moto armonico:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -m\omega_0^2 r \quad \text{con accelerazione } \dot{v} = \omega_0^2 r \text{ e periodo } T = 1/\omega_0.$$

L'energia meccanica sarebbe: $E_0 \simeq m\omega_0^2 r^2$

Assenza di perdite radiative significherebbe $\frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2 T \ll m\omega_0^2 r^2$

$$\text{cioe' } \frac{2e^2 \omega_0^4 r^2}{3c^3 \omega_0} \ll m\omega_0^2 r^2$$

cioe' $\frac{2e^2}{3c^3 m} \omega_0 = \tau \omega_0 \ll 1$ con $\tau = \frac{2e^2}{3mc^3}$, tempo caratteristico di decadimento.

se l'intervallo di tempo T in cui viene esercitata la forza meccanica e' molto piu lungo di τ , gli effetti radiativi sono trascurabili. Per l'elettrone e' $\tau = 6.26 \cdot 10^{-24} \text{sec}$, corrispondente al tempo necessario a percorrere una distanza $10^{-15} m$ con $v = c$.

Se la condizione non e' soddisfatta, si ha un moto armonico smorzato (calcoli dettagliati in Jackson, cap 16; Chpolski sect. da 70 a 74) con

una forza di richiamo, il nucleo: $F(ric) = -m\omega_0^2 r$

e una forza di frenamento radiativo (damping): $F(rad) = m \frac{2e^2}{3c^3 m} \ddot{v} = m\tau \ddot{v}$

In tutto l'equazione del moto e' una equazione differenziale di ordine tre:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -m\omega_0^2 r + m\tau \frac{d^3 r}{dt^3}$$

In prima approssimazione si puo' trascurare il frenamento radiativo (secondo termine a secondo membro); allora una soluzione e' $r = r_0 e^{i\omega_0 t} = r_0 \cos \omega_0 t$ Sostituendo le derivate prima seconda e terza e dopo qualche passaggio, si arriva a una equaz. differenziale di secondo ordine tipica delle oscillazioni smorzate:

$$\ddot{r} + \tau\omega_0^2 \dot{r} + \omega_0^2 r = 0 \quad (4.15)$$

equazione caratteristica di secondo grado corrispondente e'

$$\alpha^2 - \tau\omega_0^2 \alpha + \omega_0^2 = 0 \quad \text{con soluzione:} \quad \alpha = \tau\omega_0^2/2 \pm \omega_0 \sqrt{1 - (\tau\omega_0/2)^2}$$

sviluppando il binomio: $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx$ con $x = (\tau\omega_0/2)^2$

$$\implies \alpha = \frac{\omega_0^2 \tau}{2} \pm \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} (\frac{\tau\omega_0}{2})^2\right) = \frac{\omega_0^2 \tau}{2} \pm \left(\omega_0 - \frac{1}{8} \tau^2 \omega_0^3\right)$$

la soluzione della equaz. differenziale :

$$r = r_0 \exp(-\alpha t) = r_0 \exp\left(-\left(\frac{\omega_0^2 \tau}{2}\right)t\right) \exp(\pm i(\omega_0 - \frac{1}{8} \tau^2 \omega_0^3)t) \quad (4.16)$$

che chiamando: $\gamma = (2\pi\nu)^2 \tau$ e $2\pi \Delta\nu = \omega^3 \tau^2 1/8$ diventa:

$$r = r_0 e^{-\gamma t/2} e^{\pm i(2\pi(\nu_0 - \Delta\nu)t)} = r_0 e^{-\gamma t/2} \cos(2\pi(\nu_0 - \Delta\nu)t) \quad (4.17)$$

NOTARE che : se $\omega^3 \tau^2$ NON e' piccolo (damping forte) l'onda risultante e' sfasata di $\Delta\nu$ rispetto alla frequenza di risonanza.

Se invece il damping e' piccolo vale che: $r = r_0 \exp(-\gamma t/2) \cos(\omega_0 t)$.

Il campo elettrico del dipolo e' proporzionale allo spostamento dell'elettrone :

$$E(t) = E_0 \exp(-\alpha t) = E_0 \exp(-\gamma t/2) \cos(2\pi(\nu_0 t)) \quad (4.18)$$

L'energia dell'oscillatore decade nel tempo e l'onda e' in effetti un treno di lunghezza $\simeq c/\gamma$ e quindi non monocromatico, con uno spettro in frequenza che copre un intervallo $\simeq \gamma$ (Jackson pg 764, Chpolski sect.73); Per una generica pulsazione ω nell'intorno di ω_0 , dalla trasformata di Fourier si ottiene:

$$E(\omega) = E_0 \int_0^\infty \exp(-\alpha t) \exp(i\omega t) dt = \frac{1}{\alpha - i\omega} = \frac{1}{i(\omega - \omega_0) + \gamma/2} \quad (4.19)$$

L'ampiezza della oscillazione e' proporzionale al quadrato del modulo di $E(\omega)$

$$I(\omega) \propto [(E_\omega E_\omega^*)^{1/2}]^2 = \frac{1}{\gamma/2 + i(\omega_0 - \omega)} \cdot \frac{1}{\gamma/2 - i(\omega_0 - \omega)} = \frac{1}{(\gamma/2)^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \quad (4.20)$$

$$I(\nu) \propto I_0 \frac{\gamma/4\pi^2}{(\gamma/4\pi)^2 + (\nu_0 - \nu)^2} \quad \text{profilo Lorenziano, figura ki4.7} \quad (4.21)$$

ricordiamoci che: $\gamma = \omega^2 \tau = (8\pi^2 e^2 / 3m_e c^3) \nu_0^2 = 2.47 \cdot 10^{-22} \nu_0^2 \text{ s}^{-1}$

Dalla equazione e-21 la larghezza a meta' altezza (Full Width Half Maximum),

in frequenza e' $\Delta\nu = 2(\nu_0 - \nu) = 2(\gamma/4\pi) = \gamma/2\pi$

Interessante e' che esprimendolo in lunghezza d'onda viene un valore costante

$$\Delta\lambda = \gamma/2\pi \cdot c/\nu_0^2 = 2.47 \cdot 10^{-22} \cdot 3 \cdot 10^{10} / 6.28 = 1.18 \cdot 10^{-12} \text{ cm} = 1.18 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$$

Da come e' stato definita, la costante classica di decadimento γ ha dimensioni fisiche $[1/t]$;

allora si **puo' calcolare facilmente il valore classico della probabilita' di transizione**

$A_{nm} \simeq \gamma$

(un esempio numerico, per la riga della serie di Balmer dell'idrogeno

$$H\alpha, \lambda = 6562 \text{ \AA} (\nu = 0.46 \cdot 10^{15} \text{ Hz}), \text{ viene: } \gamma = 2.47 \cdot 10^{-22} \cdot (4.6 \cdot 10^{14})^2 = 5.2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1})$$

Da un punto di vista quanto-meccanico la larghezza naturale della riga e' legata alla incertezza sulla vita media dell'atomo negli stati coinvolti nella transizione che e' $\simeq A^{-1}$.

L'incertezza sulla energia e' $\Delta E = h/\Delta t = hA$ da cui evidentemente $\Delta\nu = A = \gamma$.

Capitolo 5

—a— - profili delle righe

aggiornato il 11 agosto 2008, pc

ref. prevalentemente Emerson capitolo 3; per profilo di espansione e contrazione il riferim e' Kitchin parag 13.7.5 pg 220 e seguenti. Alla fine del capitolo riprendo anche Deeming -Bowers cap 6.6 6.7,6.8 (eventualmente anche broadening specifico per H e He).

La formazione delle righe nelle atmosfere , nebulae, winds, non puo' essere capita senza avere chiari i meccanismi di allargamento che ne determinano i profili. L'allargamento puo' essere sostanzialmente diviso in

Allargamento naturale che e' sempre presente;

Allargamento collisionale (di pressione) dovuto alla presenza e interazione con le altre particelle nel campo, prevalentemente elettroni; con effetti sull'atomo, che irradia.

Allargamento Doppler dovuto ai moti casuali dell'atomo che irradia con differenti velocita'

Allargamento rotazionale dovuto a moti coerenti su larga scala, quale ad es. la rapida rotazione tipica delle atmosfere di stelle di tipi O e B

I primi due effetti sono legati alle transizioni e ai parametri atomici, (vita media , sezione d'urto); il terzo dipende solo dalla frequenza e dalla velocita'. il quarto dalla frequenza, dalla velocita' e dall'angolo di inclinazione dell'asse di rotazione.

5.1 Allargamento Doppler

ref Emerson pg 71 in poi.

In generale lo spostamento Doppler in frequenza e' $\Delta\nu = \nu - \nu_0 = -(v_r/c)\nu_0$ Il profilo

e' determinato dalla distribuzione delle velocita' lungo la visuale. Il profilo normalizzato ϕ_ν , e' tale perche'

$$\int_0^\infty \phi_\nu d\nu = 1. \quad \text{Bisogna trovare la costante di normalizzazione caso per caso.}$$

I casi di allargamento Doppler per moti turbolenti e caotici, si possono ridurre sostanzialmente a : **termico**, che vede coinvolte le particelle individuali a livello microscopico) e turbolenze su scale diverse **microturbolenza** cioe' moti convettivi su piccola scala; **macro-turbolenza** cioe' moti convettivi su scale piu grandi che coinvolgono profonde regioni delle fotosfere stellari .

Doppler TERMICO : Il numero di atomi con velocita' radiale compresa fra v e $v+dv$ e' dato dalla distribuzione di Maxwell:

$$n(v_r)dv_r = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\left(\frac{mv_r^2}{2kT}\right)} dv_r \quad (5.1)$$

sostituendo v_r in termini di spostamento Doppler si puo' scrivere per il profilo:

$$\phi(\Delta\nu) \propto n(\Delta v_r) = \text{cost} e^{-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2} \quad \text{con } \Delta\nu_D = \frac{v_0}{c} \sqrt{(2kT)/m} \text{ larghezza Doppler}$$

Allora $\int_0^\infty \phi_\nu d\nu = 1$. equivale a: $\int_{-\infty}^\infty \phi_{\Delta\nu} d\Delta\nu = 1$. cioe' una espressione del tipo:

$$\text{cost} \Delta\nu_D \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 1. \quad \text{che integrato risulta: } \text{cost} \Delta\nu_D \sqrt{\pi} = 1$$

da cui la costante di normalizzazione e': $\text{cost} = 1/(\Delta\nu_D \sqrt{\pi})$ e infine:

$$\phi_\nu = \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} \exp - \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2 \text{ profilo normalizzato caso di Doppler termico} \quad (5.2)$$

La forma e' di una gaussiana di cui $y = y(\text{max})/2$ quando $\exp - \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right)^2 = \frac{1}{2}$ cioe' per $\Delta\lambda = \Delta\lambda_D \sqrt{\ln(2)}$ infine :

larghezza totale a meta' altezza: $FWHM = 2\Delta\lambda_D \sqrt{\ln(2)} = 1.667\Delta\lambda_D = 1.667 \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

per esempio il Ferro (pa=55.8) per T=5700K a $\lambda=5500\text{\AA}$, usando il SI: (ma lasciando le λ in Angstrom):

$$FWHM = \frac{1.667 \lambda_0}{3 \cdot 10^8} \sqrt{\frac{2 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 5.7 \cdot 10^3}{55.8 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}} = 3.05 \cdot 10^{-5} \sqrt{1.55 \cdot 10^6} \simeq 0.037\text{\AA}$$

Nota: la $FWHM \propto 1/\sqrt{m}$ per cui a parita' di temperatura l'allargamento termico e' piu grande per atomi piu' leggeri

A quello temico si aggiungono moti turbolenti che possono essere sia su piccola, che su grande scala .In generale sono funzioni della profondita' nella atmosfera.

MICROTURBOLENZA : quando lo spessore della zona interessata e' piccola rispetto allo spessore della zona di formazione delle righe. La larghezza doppler si modifica in:

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{turb}^2} \quad \Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{turb}^2}$$

osservativamente i profili confortano la teoria; la dipendenza dalla massa della micro-turbolenza non c'è, ma la larghezza è comunque maggiore del thermal broadening: in stelle di tipo solare è circa 2km/sec (il termine sotto il segno di radice di sopra diventa $(1.55 + 4)10^6 \rightarrow FWHM = 0.07\text{\AA}$). Nelle giganti microturbolenza è più grande.

LaMACROTURBOLENZA si ha quando i moti coinvolgono elementi più grandi della regione di formazione delle righe. Il profilo è simile, con $FWHM = 1.667\lambda(v_{turb}/c)$

È importante notare che in questo caso la regione di formazione delle righe è dentro la zona di turbolenza per cui l'intensità delle righe non ne risente al contrario del caso precedente. Le zone di macroturbolenza nel Sole sono i granuli luminosi separati da zone scure dove la materia più fredda precipita verso l'interno della stella; uno spettro 'long-slit' mostrerebbe le righe come in figura em3.1, dove le tre parti blue-shifted sono in corrispondenza di granuli luminosi, dove il gas sale verso di noi. Le velocità sono di circa 10km/sec e i granuli hanno dimensioni di circa 2000 km; la differenza di temperatura fra le zone adiacenti calde e fredde può essere di circa 1500K.

Spesso le strutture non sono risolte neppure nel Sole, ma influenzano il profilo delle righe che oltre ad essere allargate, sono asimmetriche con la parte blu più intensa come in figura em3.2 (ricordiamoci che la luminosità va come σT^4) La convezione non arriva agli strati più alti della atmosfera per cui le righe di bassa eccitazione e il centro di quelle intense che si forma più in alto, non ne sono affetti. → le righe forti possono avere nucleo simmetrico e ali asimmetriche

Le teorie delle atmosfere prevedono moti convettivi su larga scala che nelle supergiganti possono avere 10 km/sec e poche celle, ma molto estese, tali che la loro fluttuazione in numero può determinare fluttuazioni di luminosità. Siccome la stella tipicamente non è risolta, osservativamente il profilo può essere confuso con quello rotazionale (un bordo si avvicina e quello opposto si allontana).

5.2 Profilo rotazionale

sempre Emerson da pg 77 in poi. cercando di semplificare perché il suo discorso è piuttosto confondente, e anche le figure originali

La rotazione influenza la forma del profilo ma non l'intensità perché noi vediamo la sovrapposizione di zone di formazione di righe aventi differenti velocità, ma uguali per il

resto. Calcoliamo il profilo nella ipotesi che la stella ruoti come un corpo rigido e inizialmente che l'asse di rotazione sia perpendicolare alla linea di vista.

Dalla figura em3.4 (visione dall'alto, lungo l'asse di rotazione) il cerchio di raggio grande R , rappresenta la sezione del piano equatoriale; quello di raggio ' r ' rappresenta la sezione di un piano parallelo a quello equatoriale, piu' in alto (basso) lungo l'asse di rotazione.

Essendo il periodo di rotazione uguale e quindi $e' \text{ cost} = 2\pi r/v_r$, se all'equatore la velocita' di rotazione e' v_R , ad una altezza lungo l'asse tale che il raggio e' r la velocita' di rotazione e' $v_r = (v_R/R)r$. Quindi, dalla figura, la velocita' rispetto all'osservatore e'

$$v_{radiale} = v_r \sin \theta = \frac{v_R}{R} r \sin \theta = \frac{v_R}{R} p \quad (5.3)$$

dove $p = r \sin \theta$ e' la distanza dall'asse di un punto O della sezione considerata. Dalla equazione si vede che per tutti i punti di tutte le sezioni, purché l'osservatore li veda posti a distanza p dall'asse di rotazione, la velocita' radiale e' la stessa

Ne segue che tutti i punti della linea verticale ' h ', visti dall'osservatore a distanza p dall'asse di rotazione, hanno la stessa v_{rad} (vedi figura em3.3) e sono quindi spostati per effetto Doppler di

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{p}{R} \frac{v_R}{c}$$

Tenendo conto dell'angolo di inclinazione ' i ' dell'asse di rotazione rispetto alla linea di vista, questa grandezza va moltiplicata per $\sin i$. Ovviamente per $p = R$ e cioe' per $h = 0$ nella figura em3.3, si ha:

$$\Delta\lambda_{max} = \lambda_0 \frac{v_R}{c} \sin i.$$

Si deve poi tenere conto della larghezza ' dp ' della striscia alta ' $2h$ '. Il profilo per ogni ' dp ' sara allora:

$$I(\Delta\lambda)d(\Delta\lambda) = I(p) 2h dp \rightarrow \frac{I_p}{I_0} = \frac{h}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{R}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{max}}\right)^2} \quad (5.4)$$

Con I_0 intensita' al centro, in corrispondenza dell'asse (dove $h=R$).

Conviene pensare in termini di profilo normalizzato: $\int \phi(\Delta\lambda) d\Delta\lambda = 1$, ossia:

$$\int_{-1}^{+1} \Delta\lambda_{max} \text{cost} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{max}}\right)^2} d\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{max}}\right) = 1$$

Nota: l'integrale e' del tipo: $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = u/2\sqrt{a^2 - x^2} + a^2/2[\arcsin(x/a)]$ nel nostro caso $a = 1$, $x = \Delta\lambda/\Delta\lambda_{max}$ e con gli estremi di integrazione -1,+1 si ha: $[0 + 1/2(\arcsin(1)) - 0 - 1/2(\arcsin(-1))] = 1/2(2\pi/2) = \pi/2$

da cui la costante di normalizzazione e': $cost = \frac{2}{\pi \Delta \lambda_{max}}$ e infine:

$$\phi(\Delta \lambda) = \frac{2}{\pi \Delta \lambda_{max}} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta \lambda}{\Delta \lambda_{max}}\right)^2} \quad \text{profilo rotazionale normalizzato} \quad (5.5)$$

La larghezza totale a meta' altezza e' $FWHM = \sqrt{3} \Delta \lambda_{max}$

Il profilo e' rettangolare piu' della gaussiana degli altri tipi di allargamento doppler (v. figura ki13.5) e le velocita' possono arrivare a piu' di 200 km/sec, mentre la turbolenza al massimo 10-15 km/sec. L'inclinazione individuale e' incognita, ma si puo' mettee un limite inferiore a v_R e ipotizzare che le inclinazioni siano casuali , da cui:

$$\langle v_R \sin i \rangle = v_R \langle \sin i \rangle = v_R \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \sin i \, d\Omega = \frac{v_R}{4\pi} 2\pi \int_0^\pi (\sin i)^2 \, di = \frac{4}{\pi} \langle v_R \sin i \rangle$$

es: stelle F5 di sequenza principale hanno una $v_R \simeq 200 \text{ km/sec}$, mentre le stelle piu' fredde hanno circa 10km/sec con una $FWHM \simeq 0.6 \text{ nm}$.

NOTA: in questa trattazione si e' considerato il disco uniformemente illuminato.

5.3 Allargamento naturale

ref. ancora Emerson, pg 83 e seg. piu' pezzi e riferimenti da tutti gli altri In pratica e' una continuazione dell'ultima parte del cap. precedente.

Come gia' scritto all'inizio el capitolo , ricordiamo che l'allargamento naturale e' legato alle transizioni e alla vita media dei livelli. Se gli stati eccitati hanno vite medie lunghe, ad ogni stato corrispondera' una banda di energia molto stretta (ricordiamo che vale il principio di Heisenberg, $\Delta E \Delta t \simeq h/2\pi$) e le transizioni e quindi le righe saranno molto nette. traducendo,la **larghezza naturale delle righe** e':

$$\Delta \nu \simeq \frac{\Delta E}{h} \simeq \frac{1}{2\pi \Delta t} \simeq \frac{A_{ji}}{2\pi} \quad (5.6)$$

La frequenza centrale della riga sara' $\nu_0 = E_{ji}/h$ (v.figura em3.8) con il livello fondamentale non allargato.

La funzione d'onda che descrive lo stato superiore puo' essere separata in una parte dipendente dalle coordinate spaziali e una dal tempo:

$$\Psi_j = \psi_j(r) \exp[i(2\pi E_{ji}/h)t]$$

La probabilita' di trovare un atomo nel livello j e' $P_j \propto \Psi_j^* \Psi_j$ che e' indipendente dal tempo. Tenendo conto della interazione radiazione materia, il livello decade spontaneamente

con una probabilita' A_{ji} come visto nel cap e. Di conseguenza si puo' scrivere che :

$$\frac{dN}{dt} = -A_{ji} N_j \quad \text{di cui l'integrale e' } N_j(t) = N_j(0) \exp(-A_{ji} t) \quad (5.7)$$

che esprime il legame fra N_j e la probabilita' di un atomo di trovarsi nello stato j , e siccome la probabilita' e' $\propto \Psi_j^* \Psi_j$ allora $N_j \propto \Psi_j^* \Psi_j$ Il che vuol dire che la funzione d'onda che descrive lo stato superiore deve essere del tipo :

$$\Psi_j = \psi_j(r) e^{-\frac{2\pi E_{ji}}{h} t} e^{-\frac{A_{ji} t}{2}} \quad (5.8)$$

i due esponenziali danno la dipendenza dal tempo $f(t)$ che puo' essere analizzata in termini di Fourier per studiare come si allarga la riga di emissione intorno alla frequenza ν_0 .

$f(t) = 2\pi \int F(\nu) \cdot e^{-2\pi i \nu t} d\nu$ con ampiezze delle frequenze intorno a ν_0 date da:

$F(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \cdot e^{+2\pi i \nu t} dt$ che dalla dipendenza dal tempo $f(t)$ espressa dalla eq. (a.7), puo' essere scritta come

$F(\nu) \propto \int [\exp(-2\pi i(\nu_0 - \nu) - \frac{A_{ji}}{2} t)] dt$ cambiando variabile le ampiezze diventano :

$$F(\nu) \propto \frac{1}{2\pi i(\nu_0 - \nu) + \frac{A_{ji}}{2}} \int_0^\infty e^{-x} dx \propto \frac{1}{2\pi i(\nu_0 - \nu) + \frac{A_{ji}}{2}}$$

l'energia emessa $I_\nu \propto F_\nu^* \cdot F_\nu \Rightarrow I_\nu \propto \frac{1}{\frac{A_{ji}}{2} + 2\pi i(\nu_0 - \nu)} \cdot \frac{1}{\frac{A_{ji}}{2} - 2\pi i(\nu_0 - \nu)} = \frac{1}{(\frac{A_{ji}}{2})^2 + (2\pi)^2(\nu_0 - \nu)^2}$

o anche, semplificando per evidenziare la dipendenza dalla frequenza:

$$I_\nu \propto \frac{1}{(\nu_0 - \nu)^2 + (\frac{A_{ji}}{4\pi})^2}$$

Come prima, bisogna trovare la costante di normalizzazione per il profilo per il quale deve valere al solito : $\int \phi_\nu d\nu = 1$. Quindi nel caso specifico deve essere:

$$\text{cost} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{(\Delta\nu)^2 + (\frac{A_{ji}}{4\pi})^2} = 1$$

Nota: l'integrale e' del tipo: $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = 1/a \cdot \text{atan}(x/a)$ nel nostro caso $a = \frac{A_{ji}}{4\pi}$, $x = \Delta\nu$ e con gli estremi di integrazione $-\infty, +\infty$, il risultato e' $= \frac{4\pi}{A_{ji}} [\pi/2 - (-\pi/2)] = \frac{4\pi}{A_{ji}} \pi$

percio': $\text{cost} \cdot \pi \frac{4\pi}{A_{ji}} = 1$ e quindi $\text{cost} = \frac{A_{ji}}{4\pi^2}$ e infine:

$$\phi_\nu = \frac{A_{ji}}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{(\Delta\nu)^2 + (\frac{A_{ji}}{4\pi})^2} \quad \text{profilo normalizzato per smorzamento naturale} \quad (5.9)$$

Naturalmente la singola transizione fra due livelli va sostituita con tutte le possibili transizioni dal livello superiore j in giu' e il livello inferiore puo' essere anche non fondamentale e

quindi allargato anche lui, per cui A_{ji} si sostituisce con un $\Gamma = \Gamma_i + \Gamma_j$. con $\Gamma_j = \sum_l A_{jl}$, con l livelli piu' bassi di j , e analogo per i .

In generale :

$$\phi_\nu = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{(\Delta\nu)^2 + (\frac{\Gamma}{4\pi})^2} \quad (5.10)$$

Il parametro Γ (probabilita' associata alla transizione e quindi all'inverso della vita media del livello) e' un indicatore della larghezza del profilo . l'andamento del profilo va come $1/\Gamma$. Maggiore e' Γ e piu' stretto sara' il profilo della riga. Il tipo di profilo e' uguale a quello 'Lorenziano' tipico dell'allargamento collisionale (v. sotto) . Quello che cambia e' il valore del parametro Γ che anche nel caso collisionale e' un indicatore della larghezza del profilo .

Il massimo, per $\Delta\nu = 0$ vale $\phi_{Max} = 4/\Gamma$ A meta' altezza $\frac{2}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{(\Delta\nu)^2 + (\frac{\Gamma}{4\pi})^2}$

larghezza totale a meta' altezza e': $FWHM = \frac{\Gamma}{2\pi}$

5.4 Allargamento per pressione (collisionale)

ref. Emerson pg 85 e seguenti, ma molto semplificato evitando inutili calcoli. Ref anche da bowers-deeming pg 133 e seg

Una causa importantissima di allargamento delle righe nelle stelle e' l'interazione degli atomi che irradiano con le particelle circostanti (ioni ed elettroni). Il risultato finale e' formalmente simile al profilo dello smorzamento naturale, ma l'entita' dell'allargamento e' molto maggiore e l'approccio e' molto piu' lungo e complicato.

5.4.1 teoria dell'impatto

Un modo per descrivere il fenomeno e' quello della **approssimazione dell'impatto** in cui si assume che il tempo scala caratteristica delle colisioni sia piccolo rispetto alla vita media dei livelli coinvolti nella transizione che quindi risulti forzata ad essere piu' corta . di conseguenza l'energia sara' piu indeterminata. Il profilo sara' simile a quello naturale ma con un Γ ovviamente piu' grande

La teoria dell'impatto vede l'effetto come dovuto a una vera 'interruzione' della radiazione emessa emessa dall'atomo, la quale, se imperturbata (e trascurando l'allargamento naturale), sarebbe un treno di onde infinito e quindi di frequenza ν_0 . che potrebbe essere descritto come (gia' visto) $f(t) \propto \exp(-2\pi i\nu_0 t)$

Se viene interrotto ad un tempo T , si puo' analizzare in termini di Fourier come una serie di onde monocromatiche di frequenza ν e ampiezza $F(\nu)$ tali che

$$f(t) \propto \int F(\nu)[e^{-2\pi i\nu t}]d\nu \quad e$$

$$F(\nu) \propto \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} f(t)[e^{+2\pi i\nu t}]dt \quad \text{cioe' } \propto \frac{1}{2\pi} \int_0^T [e^{-2\pi i(\nu_0-\nu)t}]dt$$

al solito sistemando le variabili di integrazione e integrando :

$$F(\nu) \propto \frac{[e^{-2\pi i(\nu_0-\nu)T}] - 1}{-2\pi i(\nu_0-\nu)}$$

L'ampiezza per ogni frequenza e' il prodotto

$$I(\nu) \propto F^* \cdot F = (e^{-ix} - 1)(e^{+ix} - 1) = e^{i(x-x)} - e^{+ix} - e^{-ix} + 1 \longrightarrow$$

$$I(\nu) \propto \frac{2 - e^{2\pi i(\nu_0-\nu)T} - e^{-2\pi i(\nu_0-\nu)T}}{4\pi^2(\nu_0-\nu)^2} \quad (5.11)$$

Se T_0 e' il tempo medio per collisione, e N_0 e' il numero di particelle 'imperturbate' iniziale, $N(t) = N_0 \exp(-t/T_0)$ fornisce il tasso di variazione di particelle 'imperturbate' dopo un tempo t . In definitiva $I(\nu)$ e' proporzionale all'integrale per T che tende a infinito della eq. (a.9)

$$I(\nu) \propto \frac{1}{T_0 4\pi^2(\nu_0-\nu)^2} \int_0^\infty [2 - e^{2\pi i(\nu_0-\nu)T} - e^{-2\pi i(\nu_0-\nu)T}] e^{-T/T_0} dT \quad (5.12)$$

dopo un po' di calcoli si arriva a: $I(\nu) \propto \frac{1}{4\pi^2(\nu_0-\nu)^2 + (1/T_0)^2}$

Per arrivare al profilo normalizzato si segue la stessa tecnica che per il natural damping e si ottiene il **profilo di Lorenz**:

$$\phi(\nu) = \frac{\Gamma}{4\pi^2} \frac{1}{[(\nu_0-\nu)^2 + (\Gamma/4\pi)^2]} \text{profilo collisionale normalizzato} \quad (5.13)$$

con $\Gamma = 2/T_0$. La $FWHM = \Gamma/2\pi = 1/T_0\pi$ (unita' di frequenza).

CALCOLO DI T_0 Il problema e' calcolare T_0 che e' funzione della densita' e quindi della pressione: Il numero di collisioni al secondo sara' $N_c \sigma V$ con σ =sezione d'urto, V =velocita' ($V = \sqrt{8kT/\pi(1/m_i + 1/m_c)}$) e N_c densita' di particelle che collidono sugli atomi (che irradiano con un intervallo di tempo medio T_0 . Percio'

$$T_0 \propto \frac{1}{N_c \sigma v} \rightarrow \text{la probabilita' sara' } \Gamma = 2N_c v \sigma \quad (5.14)$$

Volendo confrontare l'allargamento Doppler termico con quello collisionale in una atmosfera quale quella solare , il rapporto $\Gamma/\Delta\nu_D \simeq (2N_c c \sigma)/v$

Per $\lambda = 6000\text{\AA}$ ($5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$), $\sigma \simeq 10^{-16} \text{ cm}^2$ (ordine dimensioni atomiche), $N_c \simeq 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ (densita' tipica), $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$ risulta $\Gamma/\Delta\nu_D \simeq 5 \cdot 10^{-7}$ da cui si vede che la larghezza

doppler e' molto maggiore che non la collisionale; questo e' valido per righe deboli dove le ali non sono sviluppate. per queste righe funziona bene una approssimazione (un fit) del profilo di tipo gaussiano (Doppler).

Le interazioni collisionali sono In effetti interazioni di campi elettrici delle particelle che collidono con quelli degli atomi che irradiano e l'effetto globale sara'

$$\Delta\nu = \Delta E/h \propto K_{ij}/r^n \quad (5.15)$$

con r = distanza, K_{ij} costante dipendente dai parametri atomici, n esponente che dipende dal tipo di interazione :es coulombiana $n=2$; nel Sole il doppietto D del sodio e' allargato per impatto con atomi neutri di idrogeno; il potenziale interatomico va come r^{-6} per cui $n=6$ (Interazioni fra atomi neutri del tipo forze di Van der Waals : v. Emerson pg 96, Born pg 507).

Senza scendere in dettagli , notando che per una pressione P e temperatura T si ha $N_c \propto P/T$ e che $V \propto \sqrt{T/m}$, si deriva una espressione per Γ in funzione solo di pochi parametri:

$$\Gamma = PT^{(-n-1)/(2n-1)} \quad (5.16)$$

v figura gr13.10 per effetto della pressione sulle righe dell'idrogeno

5.4.2 teoria delle perturbazioni quasi statiche

ref Emerson pg 90 e seg. ; deeming pg 138 e seguenti.

La teoria dell'impatto, con l'ipotesi di base sul tempo di collisione medio, suppone interazioni solo a brevissimo raggio. ($n=6$ di sopra) . Nelle stelle calde ci sono atomi ionizzati e quindi elettroni e ioni liberi il cui campo coulombiano ha un range molto piu' grande delle forze di Van der Waals fra atomi neutri; il tempo di collisione e' piu' lungo, ma i profili sono ancora allargati, in questo caso dalla perturbazione dei livelli energetici degli atomi che irraggiano dovuta alla presenza del campo elettrico circostante. La situazione puo' essere pensata come una 'peturbazione quasi statica'

Il singolo perturbatore produce ancora uno spostamento dato dalla eq.(a.15). Se la densita' dei perturbatori e' N , supponendo l'atomo che irraggia al centro di una sfera di raggio r , la probabilita' che un perturbatore sia a distanza compresa fra r e $r + dr$ e'

$$P_r dr = 4\pi r^2 dr \cdot N [1 - \int_0^r P_x dx] \simeq 4\pi r^2 N \exp^{-\left(\frac{4}{3}\pi r^3 N\right)} \quad (5.17)$$

Conviene definire una distanza r_0 tale che

$4/3\pi r_0^3 = 1/N$ e lo shift $\Delta\nu_0 \propto K_{ij}/r_0^n$ da cui :

$$(r/r_0)^n = \Delta\nu_0/\Delta\nu \quad (5.18)$$

Lavorando sulla equaz (a.17) si ottiene una espressione **valida solamente nelle ali** dove $\Delta\nu$ e' grande, corrispondente a una perturbazione forte, cioe' una distanza piccola del perturbatore :

$$P_{\Delta\nu} \simeq \frac{3}{n} \left(\frac{1}{\Delta\nu}\right)^{\frac{3}{n}+1} \cdot \Delta\nu_0^{\frac{3}{n}} \quad (5.19)$$

dalla equazione si vede che per un dato $\Delta\nu_0$, la probabilita' di trovarne uno piu' vicino (che provochi un $\Delta\nu$ piu grande), diminuisce con il crescere di $\Delta\nu$. (naturalmente l tutto e' funzione di r_0 e quindi della densita').

Nei casi reali gli effetti dei vari perturbatori si sommano e si schermano anche fra loro. NOTA : la formula di sopra, oltre che essere valida solo per $\Delta\nu \gg \Delta\nu_0$, non e' valida neppure per $\Delta\nu_0$ piccoli, cioe' per distanze grandi del 'perturbatore piu' vicino' , cioe' per densita' basse.....

5.4.3 applicabilita' delle due approssimazioni

Domanda: in quale condizione e' piu' valida la teoria dell'impatto e in quale la teoria quasi statica? Il tempo caratteristico per un impatto e' circa $1/\Delta\nu$ e una collisione e' importante quando il suo tempo caratteristico e' piu' corto di quello del decadimento naturale. Se il tempo fra due collisioni e' piu' lungo invece si puo' trattare la collisione come una serie di stati stazionari e rimpiazzare le collisioni con una serie di foto statiche in cui e particelle che colidono sono distribuite secondo la probabilita' dell'approccio quasi statico. Le condizioni per il passaggio da un approccio all'altro saranno determinate da un $\Delta\nu$ **critico**, funzione di vari parametri: temperatura, densita', tipo di particelle interagenti e quindi di campo elettrico che determina il valore del parametro n .

I profili trovati per l'approssimazione statica validi solo nelle ali dove la dipendenza dal parametro n e' tale che $\Delta\nu^{-5/2}$ (per $n=2$); $\Delta\nu^{-7/2}$ (per $n=4$), comunque molto simili al $\Delta\nu^{-2}$ del metodo dell'impatto per descrivere l'allargamento per pressione.

Quindi tutti i modelli di profilo collisionale variano con la distanza dal centro in modo meno ripido dell'esponenziale della gaussiana del Doppler che (come visto sopra) e' dominante al centro della riga, ma crolla piu' rapidamente nelle ali (vedi figura em3.11).

5.4.4 Significato del parametro n

ref. un po' da emerson pg 94 , un po' da White (Stark effect), un po' da Gray.

Se la particella interagente e' carica l'interazione e' in pratica l'applicazione di un campo elettrico esterno sull'atomo che irradia ATTENZIONE : il campo esterno e' un CAMPO ELETTROSTATICO!!

Caso semplice , ma importante: atomo perturbato e' un H oppure idrogenoidi in generale; per campi relativamente deboli ($F < 100000$ V/cm) gli stati con numero quantico principale piccolo mostrano sostanzialmente solo effetti del primo ordine, cioe' lineare con il campo F (**effetto Stark lineare**) e poiche' il campo va come $1/r^2$, nella equaz. a.19 deve essere $n = 2$. vedi figura gr11.9

Per campi molto intensi (per H) e per atomi non idrogenoidi, prevale l' effetto Stark quadratico , ricordiamo, proporzionale al quadrato della perturbazione ; in questo caso il parametro n deve essere $n = 4$

nelle stelle fredde ci sono poche particelle cariche , elettroni e/o ioni per contribuire all'allargamento delle righe. La perturbazione dei livelli e' dovuta ad interazioni degli atomi con particelle neutre, tipicamente idrogeno neutro. Anche se sicuramente la teoria delle forze di Van der Waals non e' accurata, con buona approssimazione gli effetti sono riconducibili alla interazione fra momenti di dipolo indotti: gli atomi, se la densita' e' alta, inducono momenti di dipolo reciprocamente . il momento indotto e' proporzionale a $1/r^3$ e l'energia di interazione fra dipoli va come $1/r^3$ per cui in tutto $\Delta E \propto 1/r^6$ da cui nella a.19 $n = 6$. (figura gr11.4, gr11.11)

5.4.5 profili di espansione e contrazione

ref vari testi + kitchin cap 13.7.5

righe che si formano fuori della fotosfera: i casi sono diversi e con differenti fenomenologie: atmosfere geometricamente estese o sottili; otticamente spesse o sottili; stelle la cui atmosfera si espande e si contrae periodicamente; stelle di grande massa con atmosfere estese caratterizzate da vento forte e con perdita di massa continua anche di 10^{-5} masse solari per anno per periodi lunghi. L'involuppo assorbe ma anche diffonde la radiazione stellare e riemette anche un suo spettro di righe di emissione che sara' caratterizzato da parametri di temperatura e densita' diversi da quelli della fotosfera sottostante.

Lo spettro di emissione che si vede proviene da zone NON proiettate sulla stella, prevalentemente dalle regioni circostanti in modo che la velocita' proiettata e' sostanzialmente

tangenziale e quindi la velocità del nucleo della riga sia alla velocità sistemica. Invece dell'assorbimento prodotto nel vento l'osservatore vede solo l'effetto della componente della velocità lungo la linea di vista proiettata sulla fotosfera. Siccome l'involuppo si espande, vediamo le righe spostate verso il blu. Ovviamente non ci sono formule generali universalmente valide né per emissione, né per assorbimento, ma solo modelli funzionanti non proprio bene.

Una situazione tipica: Se, come nel caso delle cefeidi, l'atmosfera si muove periodicamente come un tutto unico e lo spessore è geometricamente piccolo rispetto alle dimensioni della stella il profilo per righe deboli, cresce linearmente con la distanza dalla lunghezza d'onda di riposo fino a un massimo che dà la velocità istantanea dell'involuppo:

$I(\lambda) = I_0(1 - \cos t \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0})$ la larghezza cambia con la fase nel corso del periodo di espansione-contrazione. Se lo spessore è grande il profilo è un triangolo meno netto e ci sono varie formule interpolatorie più o meno empiriche per rappresentare l'andamento della intensità. (figura ki13-6 a , b per i due casi)

Altra situazione tipica: stelle di grande massa che hanno atmosfera in espansione con rilevante perdita di massa e righe di assorbimento ed emissione che si formano nell'involuppo (naturalmente le righe di assorbimento della fotosfera continuano a essere viste, se il vento è otticamente abbastanza sottile). La velocità della espansione radiale rispetto alla stella non è costante, ma ha un andamento crescente con la distanza dalla fotosfera fino ad un valore asintotico v_∞ che può essere descritto da una legge β

$$v(r) = v_0 + (v_\infty - v_0)(1 - \frac{R_*}{r})^\beta \quad (5.20)$$

(R_* e v_0 sono il raggio della stella e la velocità alla fotosfera) vedi figura lamers.pdf, che mostra anche l'andamento della densità. Per stelle di tipo Of tipicamente $\beta \simeq 0.8$ e $v(r) = 0.85v_\infty$ a circa $4.2R_*$ cioè 3 raggi stellari di distanza dalla fotosfera. Il profilo risultante dell'assorbimento è diverso secondo che la regione sia otticamente sottile o spessa; se il vento si espande a velocità costante oppure è accelerato per pressione di radiazione e quindi il profilo è distorto; (vedere figura ki13.6 -b per righe deboli)

Se l'involuppo è otticamente e geometricamente spesso la figura lamers sopra aiuta a capire il profilo di assorbimento (lamers sotto) : gran parte del gas, che si trova fra due distanze r lontane dalla stella, ha la stessa velocità, che è quella asintotica; la massa totale è una frazione importante del totale e il profilo ha un taglio netto in corrispondenza della velocità asintotica specialmente per righe forti - saturate.

Se l'involuppo è grande l'osservatore vede anche il contributo delle zone che emettono;

inoltre, se l'involuppo e' otticamente sottile, l'osservatore vede il contributo delle zone che si avvicinano e di quelle che recedono. Il profilo di emissione e' simmetrico intorno alla velocita' sistemica ed ha forma rettangolare. Se la regione e' otticamente spessa il profilo assume forme diverse.

Il profilo globale e' tipicamente un 'P Cygni' dalla stella prototipo, con l'emissione apparentemente spostata verso il rosso a causa dell'assorbimento sul lato blu della riga. (v. figura simulazione pcygpl.jpg e stella vera lamers.pdf)

5.5 profilo convoluto

ref. un po' Emerson pg 96 in poi ; un po' Bowers pg 112 in poi...

il profilo di una riga e' formato di contributo congiunto di tutti i profili che nella maggior parte dei casi si possono ridurre a uno gaussiano (doppler termico e microturbolenza) :

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu} \exp - (\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2$$

e lorenziano (naturale e specialmete collisionale, cioe' stark quadratico e Van derWaals):

$$\phi(\nu) = \frac{\Gamma}{\pi^2 4} \frac{1}{\Delta\nu^2 + (\Gamma/4\pi)^2}$$

Se l'atomo che assorbe energia in corrispondenza di una transizione ν_0 e' fermo rispetto alla emissione e la *riga fosse allargata solo per collisione*, ad un punto di freq. ν corrisponderebbe un flusso della lorenziana ϕ_1 . Se c'e' turbolenza, il profilo e' allargato doppler, allora consideriamo un atomo che oltre a muoversi Doppler, e' anche soggetto a collisioni:

Se l'atomo si muove con una velocita' V_x rispetto alla ν_0 , vedra' il centro spostato a $\nu_0 \pm \nu_0 V_x/c$. Allora alla frequenza ν il valore del profilo sara' ϕ_2 corrispondente a una distanza maggiore (o minore) dal centro della riga $\Delta\nu = \nu_0 - (\nu \pm \nu_0 V_x/c)$ che va messo al denominatore della lorenziana per quel particolare valore della frequenza ν .

Ne segue che per una transizione ν_0 che avviene in una zona turbolenta, al variare della velocita' dei diversi atomi che assorbono per una lorenziana con un dato Γ , in corrispondenza di una frequenza ν avro' diversi valori del profilo $\phi(\nu)$ uno per ogni valore della velocita' degli atomi. Per ciascun atomo la lorenziana sara'

$$\phi(\nu) = \frac{\Gamma}{\pi^2 4} \frac{1}{[(\nu_0 - \nu) - \frac{V_x}{c} \nu_0]^2 + (\Gamma/4\pi)^2}$$

Nella figura lorenzpl.jpg se l'atomo fosse fermo con centro a frequenza $\nu_0 = 0$, l'ordinata alla frequenza $\nu = -7$ sarebbe $y=1.5$; se invece l'atomo si muove e il vero centro e' a frequenza $\nu_0 + 10 = 10$, l'ordinata che l'osservatore misura con lo spettrografo alla stessa frequenza $\nu = -7$ e' circa $y=0.4$, corrispondente a quella che sarebbe per una frequenza

distante dal 'suo' centro $\nu' = -17 = \nu - 10$, essendo in effetti $+10 =$ lo spostamento in avanti del vero centro per effetto doppler $\Delta\nu' = +10 = \nu_0 (V_x/c)$.

Per avere il profilo globale bisogna integrare sulle velocità V_x fra $\pm\infty$ per tenere conto della 'modulazione' introdotta dall'allargamento doppler. Il profilo totale sarà la convoluzione dei due.

Conviene pensare in unità di $\Delta\nu_D$ e cambiare variabili definendo : la variabile corrente di integrazione $x = \Delta\nu'/\Delta\nu_D$; una variabile $u = \Delta\nu/\Delta\nu_D$ corrispondente alla distanza dal centro della riga a riposo; una variabile $a = \Gamma/(4\pi^2\Delta\nu_D)$ che essendo rapporto fra la larghezza della lorenziana e quella doppler, misura l'importanza dell'allargamento collisionale rispetto a quello turbolento. In tutto il profilo parametrizzato in funzione di a ed u viene:

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \left[\frac{a}{\pi} \int \frac{\exp - x^2}{(u-x)^2 + a^2} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} V(a, u) \quad (5.21)$$

la funzione parametrizzata $V(a, u)$ e' chiamata **profilo di Voigt** (figura gr11.10)

5.6 coefficiente di assorbimento

il profilo convoluto entra nella trattazione della formazione delle righe nelle atmosfere stellari attraverso il **coefficiente di assorbimento** Ricordare che l'assorbimento di riga avviene solo se ci sono atomi neutri o parzialmente ionizzati e che le righe costituiscono solo una frazione molto piccola dello spettro, mentre, almeno delle atmosfere stellari, il trasporto di energia avviene per processi dominati dall'assorbimento e dalla emissione nel continuo; l'energia emessa per unità di area al secondo, da un corpo nero a temperatura T e' $\int cB_\nu(t)d\nu = \sigma T^4$ Una riga permessa tipica ha una vita media $\simeq 10^{-8} sec$ quindi una larghezza $\Delta\nu \simeq 10^8 Hz$. Nel visuale cioè a $\nu \simeq 10^{14} Hz$ corrisponde a $\Delta\nu/\nu = 10^{-6}$. per righe proibite con vite medie piu' lunghe il rapporto e' piu' piccolo \rightarrow le righe sono una piccola frazione del bilancio energetico di una stella. Comunque le righe sono fondamentali per studiare le atmosfere stellari grazie alla loro dipendenza dalle condizioni fisiche dell'ambiente.

Il meccanismo dell'assorbimento di riga puo' essere capito esaminando il coefficiente di assorbimento totale (vedi figura bow6.16); schematicamente il continuo viene emesso nella fotosfera dove la radiazione viene emessa a una temperatura T_c . Un forte assorbimento (fig bow6.16a) vuol dire per un fotone ν_0 un cammino libero medio ($l(\nu) \simeq \frac{1}{\rho\kappa_\nu}$) piu' piccolo che non per quello di un fotone nel continuo adiacente . quindi la riga si forma a profondita' ottica piu' piccola che per il continuo(fig bow6.16b). Nell'atmosfera verso l'esterno, un fotone ν_0 che arriva viene riemesso ma la temperatura e' piu' bassa e quindi σT^4 e' piu' piccolo per

cui risultato netto e' una diminuzione del flusso di radiazione (figura bow6.16c). I dettagli della intensita' e del profilo, conoscendo i parametri atomici e dal confronto con i modelli atmosferici, consentono di calcolare pressione, densita', abbondanze chimiche, temperatura, gravita'.

Il coefficiente di assorbimento rappresenta l'energia assorbita per unita' di massa, quindi legata al coefficiente di einstein per l'assorbimento e all'energia del fotone assorbito :

$$\rho\kappa_{\nu_0} = N_i B_{ij} h\nu_0 \quad \text{con } N_i \text{ numero di ioni che assorbono per unita' di volume} \quad (5.22)$$

$$\rho\kappa_{\nu_0} = \sigma_{\nu_0} N_i \quad \text{scritto in funzione della } \mathbf{sezione\ d'urto} \quad \sigma_{\nu_0} \quad (5.23)$$

$$\text{dalle due equazioni di sopra segue che :} \quad \sigma_{\nu_0} = B_{ij} h\nu_0 = \frac{g_j}{g_i} \frac{c^2}{8\pi\nu_0^2} A_{ji} \quad (5.24)$$

(NOTA: spesso si usa il numero per unita' di massa e l'equazione e' allora: $\kappa_{\nu} = \sigma_{\nu} N_{abs}$)

Per una riga (allargata), la sezione d'urto si puo' scrivere come se fosse la sezione d'urto alla frequenza centrale per il valore del profilo normalizzato alla frequenza considerata :

$$\sigma_{\nu} = \sigma_{\nu_0} \cdot \phi_{\nu}$$

Allora per una freq. qualunque nell'intorno di quella centrale, il coefficiente di assorbimento, con σ_{ν_0} definito dalla a-24 e il profilo dalla a-21, puo' essere scritto :

$$\kappa_{\nu} = N_{abs}\sigma_{\nu} = N_{abs}\sigma_{\nu_0}\phi(\nu) = N_{abs}\sigma_{\nu_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} V(a, u) \quad (5.25)$$

Nella definizione di σ_{ν} invece di usare i coefficienti di einstein si preferisce usare spesso una quantita' che sperimentalmente si riesce a determinare facilmente : la forza di oscillatore f , chiamata cosi perche' nel modello classico l'elettrone si comporta come un oscillatore armonico smorzato e per descrivere le differenti intensita' delle righe era stata introdotta la forza di oscillatore che con una trattazione quantistica si puo' dimostrare che e' legata ai coeff. di einstein dalla relazione

$$f = \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3}{8\pi^2 e^2} \frac{1}{\nu^2} \frac{g_j}{g_i} A_{ji} = 1.347 \times 10^{21} \frac{1}{\nu^2} \frac{g_j}{g_i} A_{ji} \quad (5.26)$$

questo, con la a-24 e a-25, permette di scrivere il coefficiente di assorbimento in funzione della forza di oscillatore

$$\kappa_{\nu} = \frac{\pi e^2 f N_{abs}}{4\pi\epsilon_0 mc} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} V(a, u) = \alpha_0 V(a, u)$$

con α_0 coeff. di assorbimento al centro della riga dove $u = 0$. **Vicino al centro**, dove per definizione u e' molto piccolo la funzione di Voigt si puo' approssimare con :

$$V(a, u) = \frac{a}{\pi} e^{-u^2} \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx \simeq e^{-u^2} \quad (\text{ricordare l'integrale gia visto}) \quad (5.27)$$

NOTA:

1- da questo risulta evidente come vicino al centro della riga comunque il profilo e' quello della gaussiana doppler.

2- notare anche che il coefficiente al centro della riga risulta proporzionale al numero di atomi che assorbono: $\alpha_0 = \frac{\pi e^2 f}{4\pi\epsilon_0 mc} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} N_{abs}$

Lontano dal centro ma per $a = 0$ il profilo e' gaussiano (sempre perche' vuol dire che, almeno in teoria, anche il damping collisionale e' nullo; ricordando che e' molto piccolo, l'approssimazione funziona bene); naturalmente la convoluzione in questo caso non ha senso.

Per a diverso da zero il profilo **nelle ali** dipende dal valore di a che comunque nelle stelle e' molto piccolo (figura gr11.10); Nelle ali $u \gg a$ e la funzione di Voigt puo' essere approssimata con

$$V(a, u) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{u^2} \quad (5.28)$$

NOTA: Il numero degli ioni in grado di assorbire una determinata frequenza per un particolare elemento, saranno in generale quelli in un preciso stato di eccitazione e ionizzazione e si puo' scrivere :

$$N_{abs} = \frac{N_i}{N_{ion}} \frac{N_{ion}}{N_{el}} \frac{N_{el}}{N_H} N_H. \quad N_H > 90\% \text{ in numero. In tutto per un elemento:}$$

$$\frac{N_{ion}}{N_{el}} \simeq \frac{N_{ion}}{N_{ion-1} + N_{ion} + N_{ion+1}} = \frac{1}{\frac{N_{ion-1}}{N_{ion}} + 1 + \frac{N_{ion+1}}{N_{ion}}}$$

(In LTE, la legge di popolazione dei livelli per uno stato di ionizzazione, N_i/N_{ion} e' data dalla equazione di Boltzman; quella degli stati di ionizzazione dalla equazione di Saha che descrive i rapporti N_{ion}/N_{ion+1} e N_{ion}/N_{ion-1}).
